En mekanisk analog til klassisk elektrodynamik

Af

Steffen Grøndahl

Steffen Grøndahl (f. 1970) er cand.scient i fysik fra Niels Bohr Institutet i 2000. Artiklen bygger på hans speciale. I dag arbejder han som softwareudvikler på Danmarks Meteorologiske Institut.

E-mail:`post@steffengrondal.dk`

1 Introduktion

Denne artikel betragter et simpelt hypotetisk mekanisk system: En uendelig lang svingende streng, hvortil der er fastgjort en eller flere partikler (dvs små mekaniske legemer). Dette system udviser mange lighedstræk med den klassiske elektrodynamik; Således kan man beskrive fænomener så som stråling fra en punktformet kilde, strålingsdæmpning, strålingsabsorberende medium, samt reflektion og absorption af stråling, når stråling rammer dette medium.

2 Grundligninger for den svingende streng

Bølgeligningen for en svingende streng er som bekendt[1] givet ved:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{F(x,t)}{T} \tag{1}$$

Her er ψ bølgefunktionen, der beskriver strengens udsving fra ligevægtsstillingen, x er den rumlige akse, som den hvilende streng vil være sammenfaldende med (x tænkes orienteret vandret med voksende værdier mod højre), t er tiden, v er bølgens hastighed, T er spændingen i strengen og F er krafttætheden (kraft pr længdeenhed) hidrørende fra en ydre kraft på strengen.

En bølge transporterer energi. Udtrykket for energitransporten findes i de fleste elementære lærebøger[1]:

$$P_+(x,t) = -P_-(x,t) = -T\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2}$$

Her er $P_+(x,t)$ den energi pr tidsenhed, der til tidspunktet t passerer gennem punktet x mod højre. Tilsvarende er $P_-(x,t)$ den energi pr tidsenhed, der til tidspunktet t passerer gennem punktet x mod venstre.

3 Greens funktion løsning

Vi vil nu søge en generel løsning til bølgeligningen (1). Vi indfører Greens funktionen $G(x-x_0, t-t_0)$ defineret ved

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(x-x_0, t-t_0) = \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) \tag{3}$$

Her er $\delta(x)$ Diracs deltafunktion, der som bekendt opfylder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{4}$$

Af (3) følger, at løsningen til bølgeligningen (1) kan skrives

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x_0, t-t_0)\frac{F(x_0,t_0)}{T}\, dx_0 dt_0 + \psi_0(x,t) \tag{5}$$

hvor ψ_0 er en løsningen til den homogene bølgeligning

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} = 0 \tag{6}$$

der er bestemt af randbetingelserne. I det følgende vil vi se bort fra bidraget ψ_0, idet det fulde bidrag til bølgefunktionen tænkes at hidrøre fra eksplicitte kilder (givet ved $F(x,t)$).

3.1 Retarderet løsning

Greens funktionen er ikke entydig defineret ved (3). I almindelighed benyttes den såkaldte retarderede Greens funktion givet ved:

$$G_{ret}(x - x_0, t - t_0) = \frac{v}{2}\left(\theta(t - t_0 - \frac{|x - x_0|}{v}\right) \tag{7}$$

hvor

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x > 0 \\ 0 & \text{hvis } x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

er trinfunktionen. At (7) er en løsning til (3) ses lettes ved at benytte[1]

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x) \tag{9}$$

samt at trinfunktionen kan skrives som $\theta(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{1}{2}$.

Indsættes (7) i (5) med $\psi_0 = 0$ fås

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t-\frac{|x-x_0|}{v}} \frac{v}{2T} F(x_0, t_0)\ dt_0 dx_0 \tag{10}$$

4 Stråling fra punktformet kilde

En punktformet kilde i $x = 0$ giver anledning til følgende kraft pr længdeenhed:

$$F(x, t) = f(t)\ \delta(x) \tag{11}$$

hvor $f(t)$ har dimension af kraft. Løsningen til bølgeligningen (10) kan nu skrives

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{t-\frac{|x|}{v}} \frac{v}{2T}\ f(t_0)\ dt_0 \tag{12}$$

Man bemærker – ikke overraskende – at den punktformede kilde vil give en bølge, der er symmetrisk om $x = 0$. Man kan lidt malende sige at den punktformede kilde stråler ud fra $x = 0$.

[1]Sammenhængen mellem δ-funktionen og trinfunktionen, ses let ved at foretage partiel integration i $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{d\theta(x-a)}{dx}\ dx$ og sammenholde resultatet med (4)

4.1 Partikel fastgjort til strengen

Som specialtilfælde for en punktformet kilde vil vi betragte en partikel, der er fastgjort til strengen i punktet $x = 0$. Partiklen kan kun bevæge sig i samme retning som strengen, y, og der gælder derfor for partiklens position:

$$y(t) = \psi(x = 0, t) \tag{13}$$

Af (12) følger da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{v}{2T}\, f(t) \tag{14}$$

og dermed

$$\psi(x,t) = y(t - \frac{|x|}{v}) \tag{15}$$

Denne simple sammenhæng kan synes noget overraskende, men beror på tre vigtige antagelser:

1. Der er intet begyndelsesfelt ($\psi_0 = 0$).

2. Det er kun partiklen i $x = 0$ der bidrager til kraften pr længdeenhed ($F(x,t)$), jævnfør (11).

3. Strengen er uendelig lang.

Slutteligt bemærkes, at $f(t)$ simpelthen blot er den kraft, som partiklen påvirker strengen med.

5 Udstrålet effekt fra partikel

Vi vil nu benytte (2) til at studere hvor meget energi, der udsendes fra partiklen på strengen (- husk på, at energien kun stammer fra partiklen, da den er den eneste kilde til bølger). Først betragtes et punkt $x = r > 0$. Den energi, der pr tidsenhed strømmer gennem dette punkt mod højre, er givet ved

$$P_+(x = r, t) = -T \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{t-\frac{r}{v}} \left(-\frac{1}{v} \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{t-\frac{r}{v}} \right) = \frac{1}{2}\frac{v}{2T} f(t - \frac{r}{v})^2 \tag{16}$$

Et tilsvarende resultat fås ved at betragte energistrømmen mod venstre gennem punktet $x = -r < 0$ og således bliver den samlede energi, der pr tidsenhed strømmer væk fra partiklen gennem "kugleskallen"med radius r,

$$P(r,t) = P_{-}(x=-r,t) + P_{+}(x=r,t) = \frac{v}{2T} f(t-\frac{r}{v})^2 \tag{17}$$

Man ser at effekten afhænger af kraften til $t - \frac{r}{v}$ og den momentant udstrålede effekt for partiklen er derfor

$$P(t) = \frac{v}{2T} f(t)^2 = \frac{2T}{v}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{18}$$

(hvilket naturligvis også let indses ved blot at tage grænsen $r \to 0$ i (17)). I udledningen af (18) er benyttet (14). Den udstrålede effekt er givet entydigt ved partiklens hastighed.

6 Strålingsdæmpning

Ovenstående resultat (18) fortæller, at en partikel vil miste energi, når den genererer bølger; et ikke særligt overraskende resultat. Men hvis man spørger til dynamikken for partiklen er der en interessant konsekvens. Lad os forestille os, at partiklen er under påvirkning af en ydre konservativ kraft, for eksempel en harmonisk kraft (partiklen er eventuelt fastgjort til en fjeder og til strengen samtidig). Bevægelsesligningen kunne da se ud som

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dV}{dy} \tag{19}$$

hvor m er partiklens masse og $V(y)$ er potentialet for det ydre kraftfelt (fjederen i eksemplet). Men ifølge (19) vil den mekaniske energi være bevaret under partiklens bevægelse og dette stemmer ikke med, at partiklen vil miste energi, når den skaber en bølge. For at redde energibevarelse adderes derfor en dæmpende kraft $g(t)$ til bevægelsesligningen:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dV}{dy} + g(t) \tag{20}$$

Multipliceres denne ligning med $\frac{dy}{dt}$ fås, at tabet af mekanisk energi pr tidsenhed er givet ved

$$P(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + V(y)\right) = -g(t)\frac{dy}{dt} \tag{21}$$

Sammenholdes med (18), ses at energibevarelse kun kan være opfyldt dersom

$$g(t) = -\frac{2T}{v}\frac{dy}{dt} = -f(t) \tag{22}$$

Dette er et yderst tilfredsstillende resultat

- Den indførte dæmpende kraft $g(t)$ kan gøre rede for energiregnskabet som ønsket.
- Ligning (22) kan let tolkes ud fra loven om aktion og reaktion (Newtons 3. lov): Hvis partiklen påvirker strengen med en kraft $f(t)$ vil strengen virke tilbage på partiklen med en lige så stor men modsat rettet kraft.

Dæmpningskraften er således blot reaktionskraften fra strengen.

7 Strålingsabsorberende medium

Det er muligt at indføre et strålingsabsorberende medium, altså et medium, der vil absorbere energien i bølgen. Idéen er at betragte en større samling af partikler, der alle er fastgjort til strengen og placeret jævnt og tæt. Hver partikel mærker en dæmpende kraft (udover reaktionen fra strengen) og resultatet er, at bølger bliver absorberet i dette medium, hvilket vises ved en eksplicit beregning.

Vi vil i dette afsnit ikke benytte Greens funktion løsninger til bølge ligningen, men kun selve bølgeligningen (1), dynamikken for en partikel givet ved bevægel-sesligningen (20) og at partiklerne er fastgjort til strengen (13).

Betragt først igen partiklen, der er fastgjort til strengen i $x = 0$. Vi betragter specialtilfældet hvor denne udover reaktionkraften fra strengen $(-f(t))$ kun mærker en harmonisk kraft $-m\omega_0^2 y$ (svarende til den potentielle energi $V(y) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2)$ og en dæmpende kraft, $-m\gamma\frac{dy}{dt}$. Bevægelsesligningen (20) kan nu skrives

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - m\gamma\frac{dy}{dt} - f(t) \tag{23}$$

Ligning (23) kan løses formelt ved at skrive $y(t)$ og $f(t)$ på Fourierform

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{24}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{25}$$

Indsat i (23) fås

$$\tilde{f}(\omega) = m\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma\right)\tilde{y}(\omega) \tag{26}$$

Udnyttes yderligere, at partiklen er fastgjort til strengen (13) og skrives bølge-funktionen på Fourierform

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(x,\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{27}$$

fås

$$\tilde{f}(\omega) = m\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma\right)\tilde{\psi}(x=0,\omega) \tag{28}$$

Lad os nu forestille os, at en række identiske partikler, alle under påvirkning af en harmonisk kraft $-m\omega_0^2 y$ og en dæmpningkraft $-m\gamma\frac{dy}{dt}$, er fastgjort til strengen i området $x > 0$ og vel at mærke jævnt fordelt med tætheden N. Krafttætheden $F(x,t)$ er i princippet en sum over de enkelte partiklers kraft på strengen og derfor udpræget diskontinuert (på grund af delta-funktionen fra hver partikel). Men vi ønsker ikke at beregne bølgen med mikroskopisk nøjagtighed så vi midler ud hvilket giver

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} Nm\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma\right)\tilde{\psi}(x,\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \qquad x > 0 \tag{29}$$

7.1 Reflektion og transmission af stråling gennem det absorberende medium

Som et konkret eksempel på det absorberende mediums egenskaber, vil vi bereg-ne løsningen til bølgeligningen (1) i tilfældet hvor mediet rammes af en simpel planbølge.

Udenfor mediet ($x < 0$) gælder den homogene bølgeligning, (6). Vi vil antage, at bølgen består af en simpel planbølge, der bevæger sig ind mod det strålingsabsorberende medium, samt en reflekteret bølge

$$\psi(x,t) = \psi_I(x,t) + \psi_R(x,t), \qquad x < 0 \tag{30}$$

Her er $\psi_I(x,t)$ den plane bølge, der rammer det strålingsabsorberende medium og derfor udbreder sig mod højre

$$\psi_I(x,t) = A\ sin\left(\omega_I(t - \frac{x}{v})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega(t-\frac{x}{v})} d\omega \tag{31}$$

hvor

$$A(\omega) = \frac{A}{2i}\left(\delta(\omega + \omega_I) - \delta(\omega - \omega_I)\right) \tag{32}$$

Den reflekterede bølge $\psi_R(x,t)$ må udbrede sig mod venstre

$$\psi_R(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{-i\omega(t+\frac{x}{v})} d\omega \tag{33}$$

I det absorberende medium ($x > 0$) gælder den inhomogene bølgeligning (1), med $F(x,t)$ givet ved (29). Den inhomogene bølgeligning kan derfor skrives

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}(x,\omega)}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\left(\eta(\omega) + i\kappa(\omega)\right)^2\ \tilde{\psi}(x,\omega) \tag{34}$$

hvor vi benytter den Fouriertransformerede bølgefunktion $\tilde{\psi}(x,\omega)$ jævnfør (27) og har indført det komplekse brydningsindeks $\eta(\omega) + i\kappa(\omega)$ ved

$$\left(\eta(\omega) + i\kappa(\omega)\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{\omega^2}\frac{N}{T} m\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right) \tag{35}$$

Af (35) følger:

$$\left.\begin{array}{l}
\eta(\omega) = \eta(-\omega) > 0 \\
\kappa(\omega) = -\kappa(-\omega) > 0 \text{ for } \omega > 0 \\
\eta(\omega) = 1 \text{ for } N = 0 \\
\kappa(\omega) = 0 \text{ for } N = 0 \\
\kappa(\omega) = 0 \text{ for } \gamma = 0 \\
\eta(\omega) = 1 \text{ for } \gamma = 0 \text{ og } \omega = \omega_0
\end{array}\right\} \tag{36}$$

Den generelle løsning til (34) er

$$\tilde{\psi}(x,\omega) = C(\omega)e^{i\omega(\eta(\omega)+i\kappa(\omega))\frac{x}{v}} + D(\omega)e^{-i\omega(\eta(\omega)+i\kappa(\omega))\frac{x}{v}} \tag{37}$$

Her vil leddet proportionalt med $C(\omega)$ svare til en bølge, der udbreder sig mod højre, mens leddet proportionalt med $D(\omega)$ svarer til en bølge, der udbreder sig mod venstre, jævnfør (27). Vi antager, at der ikke er noget bidrag fra bølgen, der udbreder sig mod venstre og sætter derfor $D(\omega) = 0$.

Den fulde løsning til bølgeligningen fremkommer nu ved at forlange at bølge-funktionen og dens afledede med hensyn til x er kontinuert overalt. Betragtes specielt punktet $x = 0$ (grænsen mellem medium og "vakuum") fås

$$A(\omega) + B(\omega) = C(\omega) \tag{38}$$

og

$$\frac{i\omega}{v}A(\omega) - \frac{i\omega}{v}B(\omega) = \frac{i\omega}{v}\left(\eta(\omega) + i\kappa(\omega)\right)C(\omega) \tag{39}$$

Disse to ligninger løses let med resultatet:

$$B(\omega) = \frac{1 - (\eta(\omega) + i\kappa(\omega))}{1 + (\eta(\omega) + i\kappa(\omega))}A(\omega) \tag{40}$$

$$C(\omega) = \frac{2}{1 + (\eta(\omega) + i\kappa(\omega))}A(\omega) \tag{41}$$

Indsættes heri (32) og indsættes dette i (27) fås

$$\begin{aligned}\psi_R(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\eta(\omega)-i\kappa(\omega)}{1+\eta(\omega)+i\kappa(\omega)}\frac{iA}{2}\ e^{-i\omega(t+\frac{x}{v})}\times \\ &\qquad \times\left(\delta(\omega-\omega_I) - \delta(\omega+\omega_I)\right)d\omega\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iA}{1+\eta(\omega)+i\kappa(\omega)}\ e^{-i\omega(t-(\eta(\omega)+i\kappa(\omega))\frac{x}{v})}\times \\ &\qquad \times\left(\delta(\omega-\omega_I) - \delta(\omega+\omega_I)\right)d\omega, \qquad x > 0\end{aligned} \tag{43}$$

der let integreres og efter længere men trivielle beregninger giver

$$\begin{aligned}\psi_R(x,t) &= \frac{1-\eta(\omega_I)^2-\kappa(\omega_I)^2}{(1+\eta(\omega_I))^2+\kappa(\omega_I)^2}A\sin\left(\omega_I(t+\frac{x}{v})\right) \\ &\qquad + \frac{2\kappa(\omega_I)}{(1+\eta(\omega_I))^2+\kappa(\omega_I)^2}A\cos\left(\omega_I(t+\frac{x}{v})\right)\end{aligned} \tag{44}$$

og

$$\psi(x,t) = \frac{2\left(1+\eta(\omega_I)\right)}{\left(1+\eta(\omega_I)\right)^2+\kappa(\omega_I)^2} A \sin\left(\omega_I(t-\eta(\omega_I)\frac{x}{v})\right) e^{-\omega_I \kappa(\omega_I)\frac{x}{v}}$$
$$+\frac{2\kappa(\omega_I)}{\left(1+\eta(\omega_I)\right)^2+\kappa(\omega_I)^2} A \cos\left(\omega_I(t-\eta(\omega_I)\frac{x}{v})\right) e^{-\omega_I \kappa(\omega_I)\frac{x}{v}},\ x>0 \quad (45)$$

hvor vi har brugt de to første ligninger i (36).
Om de to løsninger (44) og (45) bemærkes

- Begge løsninger er reelle (som forventet)
- Frekvensen af den reflekterede bølge er den samme som for den indfaldende bølge, $\psi_I(x,t)$, hvilket også er som forventet.
- Den effektive hastighed i det strålingsabsorberende medium er $\frac{v}{\eta(\omega_I)}$. Med andre ord bestemmes hastigheden af den reelle del af brydningsindekset, $\eta(\omega_I)$.
- Den imaginære del af brydningsindekset $\kappa(\omega_I)$ medfører, at stråling absorberes i mediet, jævnfør leddet $e^{-\omega_I\kappa(\omega_I)\frac{x}{v}}$ i (45). Man kan let beregne halveringstykkelsen til $\frac{v \ln 2}{\omega_I \kappa(\omega_I)}$.
- I tilfældet $N = 0$ (intet absorberende medium) reduceres (44) og (45) til $\psi_R(x,t) = 0$ henholdsvis $\psi(x,t) = \psi_I(x,t)$ for $x > 0$, jævnfør ligning 3 og 4 i (36). Den fulde løsning er således blot en planbølge, der udbreder sig mod voksende værdier for x. Igen helt som forventet.
- Hvis der ikke er nogen dæmpende kraft i mediet (altså hvis $\gamma = 0$) og den indfaldende bølge ψ_I justeres så $\omega_I = \omega_0$, følger af ligning 5 og 6 i (36), en løsning, der er identisk med løsningen i tilfældet $N = 0$. Med andre ord vil den indfaldende bølge i dette tilfælde penetrere ganske uhindret gennem mediet. Dette er en speciel form for resonans med det mediet.
- I grænsen hvor mediet er uendeligt tæt og/eller tungt ($Nm \to \infty$) vil vi have $\eta \to \infty$ og $\kappa \to \infty$ (jvf (35)). I denne grænse reduceres (44) og (45) til $\psi_R(x,t) = -A\sin\left(\omega_I(t+\frac{x}{v})\right)$ henholdsvis

$\psi(x, t) = 0$. Vi har med andre ord - ikke overraskende - fuldstændig reflektion i dette tilfælde.

8 Analogi til elektrodynamik

Den her beskrevne model er som sagt på mange måder analog med den klassiske elektrodynamik. Både hvad angår resultater og ræssonementer. En fuldstændig gennemgang af dette vil føre for vidt her, så derfor blot nogle kommentarer:

- Den væsentligeste forskel er, at elektrodynamikken udspiller sig i det tre-dimensionale rum. Dette giver ekstra frihedsgrader og dermed ekstra kompleksitet. For eksempel vil man i bølgeligningen skulle benytte d'Alembert operatoren, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ i stedet for $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

- I stedet for et skalarfelt ψ har man i elektrodynamikken to vektorfelter (den elektriske og det magnetiske feltstyrke). Igen noget der forøger kompleksiteten.

- Man kan løse den inhomogene bølgeligning med en Greens funktion, men denne vil nu afhænge af alle tre rum-koordinater. Således er den retarderede Greens funktion

$$G_{ret}(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0) = \frac{\delta(t_0 - t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c})}{4\pi\ |\vec{r} - \vec{r}_0|} \tag{46}$$

- Løsningen for en enkelt partikel er velkendt som Liénard-Wieckerts løsnin-gen (se for eksempel [2]). Igen er felterne beskrevet entydigt ved partiklens bevægelse, men med en kompliceret afhængighed af partiklens position, hastighed og acceleration.

- Den udstrålede effekt beregnes ved hjælp af Poynting vektoren, men da feltet (Liénard-Wieckert løsningen) er ret kompliceret beregnes normalt den energi, der strømmer ud gennem en stor kugleskal om partiklen. Fordelen er, at man så kan nøjes med at medtage de bidrag til felterne, som aftager svagest med afstanden r (som $\frac{1}{r}$).

Resultatet (kendt som Larmors teorem) giver den energi der stråles uendelig langt væk

$$P(t) = \frac{2}{3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) \tag{47}$$

Sammenlignes med (18) ses analogien tydeligt: Hvor vi for strengen havde, at den udstrålede effekt var proportional med kvadratet på partiklens hastighed, bliver den i elektrodynamikken proportional med kvadratet på partiklens acceleration. Dette resultat gælder dog kun i den ikke-relativistiske grænse.

- Strålingsdæmpningen kan beregnes fuldstændig analogt med beregningerne i afsnit 6. Hvis man indskrænker tilfældet til en ikke-relativistisk kvasiharmonisk bevægelse fås, at strålingsdæmpningen er proportional med den tidsafledede acceleration. I modsætning til strengtilfældet er det ikke helt let at finde den fysiske årsag til dæmpningskraften. Desuden giver det problemer at have en dæmpningskraft, der afhænger af den tidsafledede af accelerationen. (Se [3] for en dybtgående diskussion af disse emner.)

- I elektrodynamikken er det muligt at indføre et dipolfelt, der er karakteriseret ved en indre harmonisk og dæmpende kraft på dipolen. Et sådan dipolfelt vil virke som et absorberende medium (se for eksempel [4]) og en analyse viser, at det elektriske felt i dette medium adlyder en ligning analog med (34), og altså med et kompleks brydningsindeks.

- Endelig kan man let beregne reflektion og transmission af planbølget elektromagnetisk stråling, der falder vinkelret ind på det absorberende dipol medium. Resultater er ikke overraskende meget lignende (44) og (45). Dog haves ikke en resonans i tilfældet $\omega_I = \omega_0$ (men en divergens).

Litteratur

[1] B. Elbek: *Bølger*, Niels Bohr Instututtet (1994)

[2] L.D. Landau & E.M. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields*, 4 ed, Pergamon (1975)

[3] F. Rohrlich: *Classical Charged Particles*, World Scientific Publishing Company, 3 edition (2007)

[4] R. Becker: *Electromagnetic Fields and interaction Vol 1 and 2*, Dover (1982)