—*Paradokser og Opgaver*

MOGENS ESROM LARSEN OG KATRINE RUDE LAUB

Vi modtager meget gerne læserbesvarelser af opgaverne, samt forslag til nye opgaver enten per mail (`gamma@nbi.dk`) eller per almindelig post (se adresse på bagsiden). Første indsendte, korrekte læsning til en af de stillede opgaver bringes i næste nummer af **Gamma**.

Opgave – Den mystiske pyramide

Ægyptens ældste pyramide, trinpyramiden ved Sakkara, ligner ikke Cheops' og de andre. Som navnet antyder, har den snarere form som en kæmpetrappe, mere som Mayaernes pyramider.

Hvis vi begynder fra over, er der én sten i det øverste lag, fire i det næste, ni i det tredie, osv.

Når vi nu får at vide, at antallet af sten, der ialt er medgået til byggeriet, er et kvadrattal, og at der er medgået mere end én sten, hvor mange trin har så pyramiden?

Opgave – Eventyret

Der var engang en prins, der skulle vælge sig en prinsesse. Han havde valget mellem tre søstre, som alle var unge og smukke. Deres far var en viis gammel konge, og han ville sikre sig, at hans kommende svigersøn havde omløb i hovedet. Så han sagde til prinsen:

"Før du får min velsignelse til at ægte en af mine døtre, vil jeg sætte dit mod og din intelligens på en prøve.

Du får lov til at stille én af prinsesserne ét spørgsmål, som kan besvares med "ja" eller "nej". Den ene vil svare sandfærdigt, den anden vil svare falsk, og den tredje, som er min yndlingsdatter, kan svare sandfærdigt eller falsk, som hun vil. Hun har alligevel aldrig rettet sig efter mig.

Ud fra svaret på dit spørgsmål skal du vælge din brud. Men jeg advarer dig: Hvis du vælger min yndlingsdatter, skal du have dit hoved hugget af!"

Prinsen havde ingen anelse om, hvem der var kongens yndligsdatter, lige så lidt som han anede, hvem der ville tale sandt, og hvem falsk. Han måtte altså formulere sit spørgsmål sådan, at ligegyldigt hvem han spurgte, og ligegyldigt, hvad hun svarede, skulle han ud fra svaret kunne vælge en af de to andre til sin brud.

Naturligvis stillede prinsen et så snedigt spørgsmål, at han med sikkerhed undgik yndlingsprinsessen. Og kongen blev så imponeret, at han alligevel gav prinsen yndlingsdatteren, og de to levede lykkeligt til deres dages ende.

Hvordan mon prinsen formulerede sit spørgsmål?

Opgave – Gitterpunkterne

Forleden dag sad jeg og slog krusseduller på et almindeligt ark ternet papir. Så kom jeg for skade at lege med gitterpunkterne. Jeg valgte 5 af dem tilfældigt ud.

Så tegnede jeg alle 10 forbindelseslinier mellem dem. Og hver gang var der et af liniestykkerne, der passerede hen over et gitterpunkt.

Hvorfor det?

Opgave – Pythagoras

En Pythagoræisk trekant med heltallige sider, x, y og z, der opfylder

$$x^2 + y^2 = z^2$$

må have mindst én side som et lige tal. Og ingen Pythagoræisk trekant har en side af længde 2. Men man kan tænke sig en Pythagoræisk trekant, hvis sider er to primtal og et tal, der er det dobbelte af et primtal.

Opgaven går ud på at bestemme *samtlige* Pythagoræiske trekanter af den slags.

Opgave – De logiske frimærkesamlere

Tre personer – A, B og C – var alle fuldstændig logiske. De kunne alle tre øjeblikkelig drage alle de logiske konsekvenser af alle præmisser. Desuden vidste hver af dem, at de to andre var lige så logiske som han selv. Man viste dem syv frimærker; to røde, to gule og tre grønne. Derpå fik de bind for øjnene, og et frimærke blev klistret i panden af dem hver især, mens de resterende frimærker blev lagt ned i en skuffe. Da øjenbindene var fjernet, spurgte man A: "Kan du nævne én farve, som dit frimærke i hvert fald ikke har?" "Nej," svarede A. Så fik B det samme spørgsmål, og han svarede også "nej".

Er det muligt ud fra disse oplysninger at regne sig frem til, hvilken farve A's frimærke havde? Eller B's? Eller C's?

Opgave – Joakim von And i Sahara

Joakim von And er som bekendt verdens rigeste og nærigste and. Da han derfor engang skulle køre over Sahara i jeep, måtte han jo spekulere på, hvor billigt det kunne lade sig gøre.

Nu var hans jeeps kun i stand til at køre en trediedel af vejen på en fuld tank, men til gengæld kunne alle hans jeeps køre fuldautomatisk uden chauffør, og han havde masser af dem. Og han kunne let tømme og fylde tankene midt i ørkenen uden at spilde. Men med fuld tank menes så meget benzin, som en jeep på nogen måde kan medbringe.

Problemet er, hvordan slipper Joakim von And billigst muligt over ørkenen, når hele hans flåde af jeeps står på den ene side. Hvor mange jeeps skal han bruge, og hvordan skal han bære sig ad?

Svar – En tryllekunst

Tryllekunstneren og hans assistent præsenterer publikum for 8 mønter på en række. Tryllekunstneren instruerer publikum om opgaven og forlader lokalet. Publikum vælger nu for hver mønt, om den skal være krone eller plat. Derefter oplyser publikum assistenten om deres foretrukne mønt, fx. nr. 5 fra venstre. Nu vender assistenten én af mønterne om efter sit valg.

Tryllekunstneren kommer ind fra kulissen og udpeger den foretrukne mønt.

Vi stiller mønterne på række og giver dem numre fra venstre mod højre, 0, 1, ..., 7. Disse tal organiserer vi som gruppen $\mathbb{Z}_2^3$, fx. ved at skrive numrene binært fra 000 til 111 og definere gruppeoperationen som addition uden mente – eller, om man vil, med regnereglen $1+1=0$. Så fx. er $3+6 = 011+110 = 101 = 5$. En række af mønter gives nu værdien, der er summen af numrene på de viste kroner. Mønsteret PPKKPKPP får således summen $2+3+5 = 010+011+101 = 100 = 4$. Hvis nu publikum vælger at pege på mønt nr. 3, så skal vi vende en mønt, så summen bliver 3 i stedet for 4. Vi skal altså løse ligningen $4+x = 3$. Men da alle elementer i gruppen er deres egen inverse, er $x = 3+4 = 011+100 = 111 = 7$. Vi skal derfor vende den sidste mønt, så vi får PPKKPKPK med summen 2+3+5+7=010+011+101+111=011=3.

Dette trick virker for enhver potens af 2, men med andre antal mønter kan kunsten ikke udføres. Prøv selv at lave tryllekunsten med 3 mønter!

Svar – En sum

I Amer. Math. Monthly April 2008 stilles som problem 11356 en opgave af Michael Poghosyan, Yerevan State University, Yerevan, Armenien.

Vis identiteten

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

Bevis:
Vi definerer den nedstigende faktoriel med angivet skridtlængde således

$$[x,d]_n := \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1}(x-jd) & n \in \mathbb{N} \\ 1 & n=0 \\ \prod_{j=1}^{-n}\dfrac{1}{x+jd} & -n \in \mathbb{N},\ -x \notin \{d, 2d, \cdots, -nd\} \end{cases}$$

Vi omskriver de fleste binomialkoefficienter i summen til faktorieller

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!(2k)!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(2n)!(2k+1)}$$

Faktoriellerne med et 2–tal deles i faktorieller af hvert andet led og skridtlængde 2

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!\,[2k,2]_k\,[2k-1,2]_k\,[2n-2k,2]_{n-k}\,[2n-2k-1,2]_{n-k}}{k!(n-k)!\,[2n,2]_n\,[2n-1,2]_n\,(2k+1)}$$

Nu halveres alle faktorerne, så skridtlængden bliver 1, med korrektioner af diverse potenser af 2

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!k!2^k\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k 2^k(n-k)!2^{n-k}\left[n-k-\frac{1}{2},1\right]_{n-k}2^{n-k}}{k!(n-k)!n!2^n\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n 2^n(2k+1)}$$

Efter at have forkortet, hvad som kan, fås

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k\left[n-k-\frac{1}{2},1\right]_{n-k}}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n(2k+1)} =$$

$$\frac{1}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k\left[n-k-\frac{1}{2},1\right]_{n-k}}{2k+1}$$

For at komme nævneren til livs indføres faktoriellen

$$\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n \cdot \frac{1}{2} = \left[n+\frac{1}{2},1\right]_{n+1} = \left[n+\frac{1}{2},1\right]_{n-k} (k+\frac{1}{2}) \left[k-\frac{1}{2},1\right]_k$$

hvorved fås

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{\left[n+\frac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k}{\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n}$$

Så kan vi skrive

$$\frac{1}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k\left[n-k-\frac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[n+\frac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k$$

Nu skifter vi fortegn i alle faktorerne i de faktorieller, der indeholder et k i starten

$$\frac{1}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[-\frac{1}{2},1\right]_k(-1)^k\left[-\frac{1}{2},1\right]_{n-k}(-1)^{n-k}\left[n+\frac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[-\frac{1}{2},1\right]_k(-1)^k$$

hvilket skrives pænere som

$$\frac{(-1)^n}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[-\frac{1}{2},1\right]_k^2\left[-\frac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[n+\frac{1}{2},1\right]_{n-k}(-1)^k$$

Dette udtryk genkendes som Pfaff-Saalschütz' formel, (9.1), i min nylige lærebog, *Summa Summarum,* A K Peters 2007:

Theorem 9.1. *If the – complex – numbers satisfy $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = n - 1$ we have the Pfaff-Saalschütz formula (J. F. Pfaff 1797, L. Saalschutz 1890)*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [a_1, 1]_k [a_2, 1]_k [b_1, 1]_{n-k} [b_2, 1]_{n-k} (-1)^k$$

$$= [b_1 + a_1, 1]_n [b_1 + a_2, 1]_n (-1)^n$$

Så vi kan reducere til

$$\frac{1}{\left[n - \frac{1}{2}, 1\right]_n \left[n + \frac{1}{2}, 1\right]_n} [-1, 1]_n^2 = \frac{n!^2}{\left[n - \frac{1}{2}, 1\right]_n \left[n + \frac{1}{2}, 1\right]_n} =$$
$$\frac{2^{2n} n!^2}{[2n - 1, 2]_n [2n + 1, 2]_n} = \frac{2^{4n} n!^4}{[2n - 1, 2]_n [2n, 2]_n^2 [2n + 1, 2]_n}$$

$$= \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)!(2n + 1)!}$$

Svar – Sokker, der passer til hinanden

Når sandsynligheden for at få to røde sokker er $\frac{1}{2}$, når man trækker to tilfældigt ud af en sæk med røde og sorte sokker, hvor mange er der så af hver farve i sækken?

Det samlede antal sokker betegnes med m, og antallet af røde sokker med n. Så kan man udtage et par sokker på $m(m-1)/2$ måder, og et par røde sokker på $n(n-1)/2$ måder.

Sandsynligheden for, at et tilfældigt udtaget par sokker er røde, er altså $n(n-1)/m(m-1)$, og denne sandsynlighed er $\frac{1}{2}$, hvis og kun hvis

$$m(m - 1) = 2n(n - 1)\,. \tag{1}$$

Et talpar (m, n), som er løsning til (1), giver en løsning til sokkeproblemet, hvis m og n er hele tal ≥ 2. Ligningen (1) kan omformes til

$$(2m - 1)^2 = 2(2n - 1)^2 - 1\,,$$

og det ses let, at hvis (x, y) er en heltallig løsning til

$$x^2 - 2y^2 = -1\,, \tag{2}$$

så er x og y begge ulige, således at $m = (x+1)/2$ og $n = (y+1)/2$ er hele. For at finde samtlige løsninger til sokkeproblemet, skal vi altså finde samtlige heltallige løsninger til (2) med $x \geq 3$ og $y \geq 3$.

For reelle tal z i ringen $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ af tal af formen $z = x + y\sqrt{2}$ med $x, y \in \mathbb{Z}$ indfører vi betegnelsen $\overline{z} = x - y\sqrt{2}$.

Vi bemærker, at der for $z, w \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gælder $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, samt at (x, y) er løsning til (2), hvis og kun hvis $z = x + y\sqrt{2}$ er løsning til

$$z\overline{z} = -1\,. \tag{3}$$

Idet vi sætter $e = 1 + 1\sqrt{2}$, ser vi, at $e\overline{e} = -1$, hvoraf følger, at z er løsning til (3), hvis og kun hvis $e^2 z$ er det.

Hermed har vi uendeligt mange løsninger til (3), nemlig

$$z_k = e^{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{4}$$

Her giver $z_0 = e = 1 + 1\sqrt{2}$ ikke nogen løsning til sokkeproblemet, men alle z_k med $k \geq 1$ gør, og specielt har vi $z_1 = 7 + 5\sqrt{2}$, der giver $(m_1, n_1) = (4, 3)$.

Ved brug af binomialformlen i (4), får vi

$$x_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} 2^{k-j}\,, \quad y_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j} 2^{k-j}\,,$$

der for $k \geq 1$ giver løsningen

$$m_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j+1} 2^{k-j-1} + 1\,, \quad n_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j} 2^{k-j-1} + k + 1\,,$$

til sokkeproblemet.

Da $z_k = e^2 z_{k-1} = (3 + 2\sqrt{2}) z_{k-1}$, kan følgen $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ også bestemmes rekursivt ved

$$\begin{aligned} &x_1 = 7, && y_1 = 5\,, && \\ &x_k = 3x_{k-1} + 4y_{k-1}\,, && y_k = 2x_{k-1} + 3y_{k-1} && \text{for } k \geq 2\,. \end{aligned}$$

Ved indsættelse af $x_k = 2m_k - 1$, $y_k = 2n_k - 1$ heri fås rekursionligningerne

$$\begin{aligned} &m_1 = 4\,, && n_1 = 3\,, \\ &m_k = 3m_{k-1} + 4n_{k-1} - 3\,, \quad && n_k = 2m_{k-1} + 3n_{k-1} - 2 \qquad \text{for } k \geq 2 \end{aligned}$$

til bestemmelse af løsninger til sokkeproblemet.

Jeg vil slutte med at bevise, at dette er samtlige løsninger. Dertil vil jeg vise, at talsættene $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{\infty}$ er samtlige positive heltalsløsninger til (2). Lad nemlig (x, y) være en vilkårlig positiv heltalsløsning til (2), sæt $z = x + y\sqrt{2}$, og bemærk, at $z \geq e$.

Lad $k \geq 0$ være bestemt således, at

$$e \leq ze^{-2k} < e^3\,, \tag{5}$$

og sæt $z' = ze^{-2k}$.

Da z' kan skrives $z' = z\overline{e}^{2k}$, er $z' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, lad os sige $z' = x' + y'\sqrt{2}$.

Da $z'\overline{z'} = z\overline{z} = -1$ og $z' > 1$, er $|\overline{z'}| = |x' - y'\sqrt{2}| < 1$, hvilket kun kan være opfyldt, hvis x' og y' har samme fortegn, dvs hvis x' og y' begge er positive.

Da $x'^2 = 2y'^2 - 1$, er $x' = y' = 1$ en mulighed, medens $y' = 2, 3$ eller 4 ikke kan bruges. $y' \geq 5$ giver $x' \geq 7$, og altså $z' = x' + y'\sqrt{2} \geq e^3$ i modstrid med (5). Der må altså gælde $z' = e$, og dermed $z = z'e^{2k} = z_k$.

Svar – Travle duellanter

Duellerne i Travløse er sjældent fatale. Hver kombattant møder op på et tilfældigt tidspunkt mellem 5 og 6 om morgenen på den aftalte dag, venter 5 min på sin modstander, og går igen, hvis denne ikke er mødt op. Ellers slås de to.

Hvad er sandsynligheden for, at det kommer til kamp?

Lad (x, y) betegne ankomsttidspunkterne for de to duellanter, regnet i timer fra klokken 5. Så er sandsynlighedsfordelingen for (x, y) Lebesguemålet på enhedskvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$.

Det kommer til kamp, hvis og kun hvis $|y - x| \leq 1/12$, dvs hvis og kun hvis (x, y) *ikke* ligger i en af trekanterne

$$\begin{array}{llll} T_1 : & \frac{1}{12} < x \leq 1 & \text{og} & 0 \leq y < x - \frac{1}{12}\,, \\ T_2 : & 0 \leq x < 1 - \frac{1}{12} & \text{og} & x + \frac{1}{12} < y \leq 1\,. \end{array}$$

Sandsynligheden for, at de to duellanter mødes, er altså

$$1 - 2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{23}{144}\,.$$

Svar – Eksponentielt

Når man får at vide, at tallet 2^{29} er 9–cifret, og at de 9 cifre alle er forskellige, kan man så uden at udregne tallet bestemme, hvilket ciffer der mangler?

Vi har

$$2^{29} = 2^2 \times (2^3)^9 \equiv 4 \times (-1)^9 = -4 \pmod 9$$

og

$$0 + 1 + 2 + \cdots + 9 \equiv 0 \pmod 9,$$

og altså må det manglende ciffer være 4.

Svar – Trekantet

En trekant er tegnet på ternet papir, så alle tre hjørner er i skæringspunkter (punkter med heltallige koordinater). Lad nu r være antallet af skæringspunkter på randen og i antallet af skæringspunkter i det indre af trekanten. Vis, at arealet af trekanten er

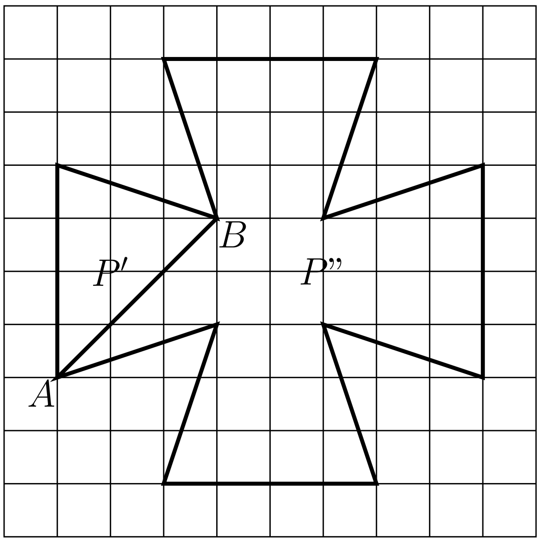
$$i + \frac{1}{2}r - 1$$

Jeg vil bevise, at formlen gælder ikke blot for trekanter, men for vilkårlige "gitterpolygoner", dvs polygoner med hjørner i gitterpunkterne. For en vilkårlig gitterpolygon P defineres $f(P) = i + \frac{1}{2}r - 1$, hvor i er antallet af gitterpunkter i det indre af P, og r antallet af gitterpunkter på randen.

Jeg skal bevise, at $f(P) = a(P) =$ arealet af P for enhver gitterpolygon P.

Lemma. *Hvis P er delt i to delpolygoner P' og P'' ved et linjestykke, der forbinder to gitterpunkter A og B på randen af P, så er*

$$f(P) = f(P') + f(P'')\,.$$



Bevis: Lad i, i', og i'' hhv r, r', og r'' betegne antallet af indre gitterpunkter hhv randgitterpunkter for P, P', og P'', og lad i^* betegne antallet af indre gitterpunkter i P, som tilhører linjestykket AB.

Så er

$$i = i' + i'' + i^*\,,$$

og da A og B tæller med både i r' og r'', er

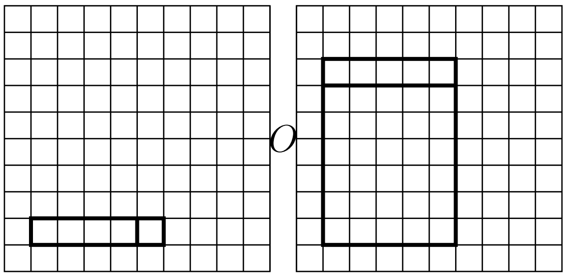
$$r = (r' - i^*) + (r'' - i^*) - 2\,,$$

og (1) følger.

Bevis for, at $f(P) = a(P)$:

(a) Hvis P er enhedskvadratet, er $f(P) = a(P)$. Bevis: $i = 0$, $r = 4$

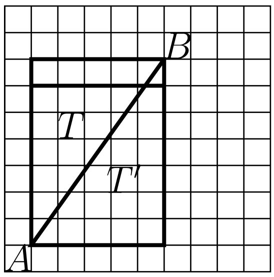
(b) Hvis P er et akseparallelt rektangel med sider m og n, er $f(P) = a(P)$.



$m = 5, \quad n = 1$ $m = 5, \quad n = 7$

Bevis: Først induktion efter m med $n = 1$, derefter induktion efter n med m fast.

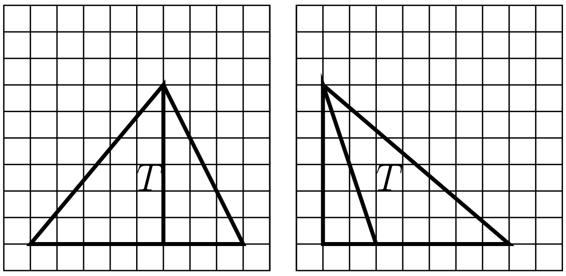
(c) Hvis T er en trekant med to akseparallelle sider, er $f(T) = a(T)$.



Bevis: Lad P være det rektangel, der fremkommer, når man tegner akseparallelle linjer gennem den tredje sides endepunkter A og B. Så deler linjestykket AB rektanglet P i to trekanter T og T'. Af symmetrigrunde er $f(T) = f(T')$ og $a(T) = a(T')$, og af (1) og (b) følger, at

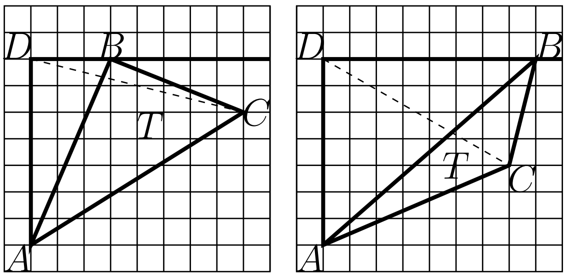
$$f(T) = \frac{f(T) + f(T')}{2} = \frac{f(P)}{2} = \frac{a(P)}{2} = a(T)\,.$$

(d) Hvis T er en trekant med én akseparallel side, er $f(T) = a(T)$.



Bevis: T er enten foreningsmængde af eller differens mellem to trekanter, der begge har to akseparallelle sider.

(e) Hvis T er en trekant uden en akseparallel side, er $f(T) = a(T)$.



Bevis: Lad R være det mindste akseparallelle rektangel, der indeholder T. Da hver af R's sider indeholder præcis én af T's vinkelspidser, er der en af T's vinkelspidser (A), der samtidig er vinkelspids i R, medens der om de to andre vinkelspidser i T gælder enten, at de ligger på hver sin af R's øvrige sider, eller, at en af dem (B) er sammenfaldende med den vinkelspids i R, der er over for A, og den anden i det indre af R.

Lad vinkelspidsen D i R være bestemt således, at $ADBC$ er en konveks firkant (se figurerne). Så er

$$\begin{aligned} f(T) &= f(ADC) + f(DBC) - f(ADB) \\ &= a(ADC) + a(DBC) - a(ADB) \\ &= a(T)\,. \end{aligned}$$

(f) Hvis P er en vilkårlig gitterpolygon, er $f(T) = a(T)$.

Bevis: P deles i trekanter.

Dette er Picks sætning (1899), Georg Alexander Pick (1859-1942).