

Afsender:

Returneres ved varig adresseændring

**Gamma**

Niels Bohr Institutet

Blegdamsvej 17

2100 København Ø



# Gamma $\Gamma$

Tidsskrift for fysik • Vinter 2008 • Nr. 152

Fortale . . . . . s 3

Nyheder og meddelelser . . . . . s 4

*Steffen Grøndahl*

En mekanisk analog til klassisk elektrodynamik . . . . . s 8

*Christopher R. Jacobsen*

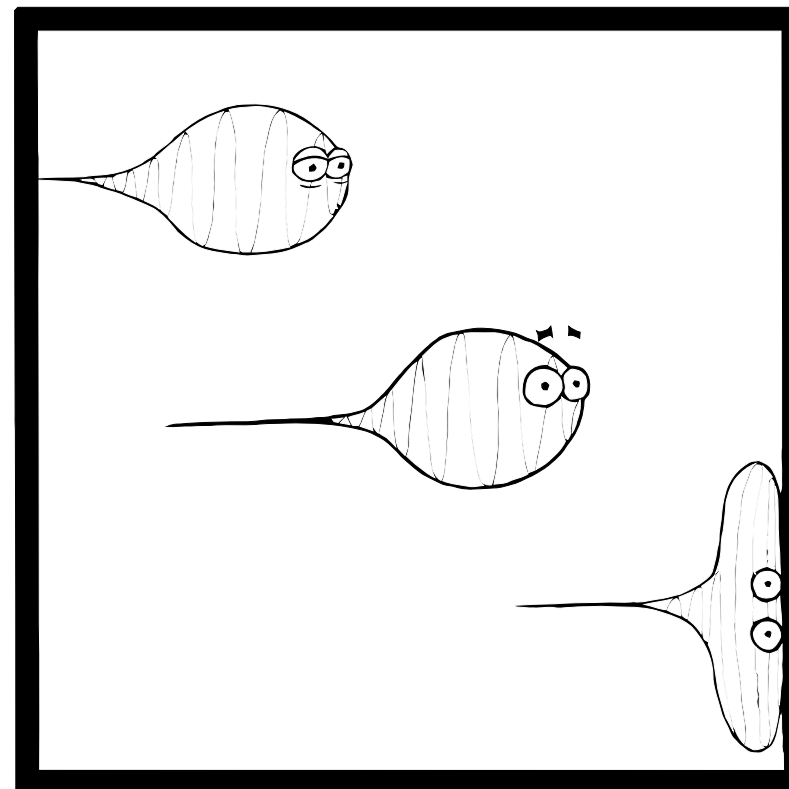
Measuring the momentum of light . . . . . s 23

Boganmeldelser

Helge Kragh: Einsteins univers - en fysikers tanker om natur  
og erkendelse . . . . . s 41

Paradokser og opgaver . . . . . s 46

Indhold . . . . . s 60



## Gamma

**Gamma** er grundlagt i 1971 og finansieres af Niels Bohr Institutet. Bladet udkommer 4 gange om året og fås gratis ved henvendelse til redaktionen. Vi beder dog vore læsere om at afhente **Gamma** på en skole, et institut eller vores hjemmeside, hvis man har mulighed for det.

### Redaktion:

Katrine Rude Laub (KRL)  
Michael F. Artych (MA)(ansv.)  
Jakob M. Wrigley (JW)

### Skribenter:

### Adresse:

**Gamma**  
Niels Bohr Institutet  
Blegdamsvej 17  
2100 København Ø  
**Tlf:** 35 32 53 19  
**Email:** gamma@nbi.dk  
www.gamma.nbi.dk

### Redaktionstid:

Se den aktuelle redaktionstid på vores hjemmeside.

### Adresseændring:

Meddeles til postvæsenet, hvis man modtager **Gamma uden** kuvert, og til redaktionen, hvis man modtager bladet i kuvert. Afbestillinger skal ske på hjemmesiden. Abonnementsnummer (tallet bagefter f.eks. 91646 KHC) bedes oplyst.

### Artikler:

Vi modtager gerne artikler, debatindlæg og kommentarer. Vi foretrækker kommunikation over email og manuskripter i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X eller txt format, men Microsoft Word og Corel Wordperfect filer modtages også.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

ISSN 0108-0954  
NBI-tryk oplag 2700

# Om Forsiden

Det sjældne syn af en foton umiddelbart før og under en impulsmåling.

Illustration:  
Silja Heilmann

---

(f) Hvis  $P$  er en vilkårlig gitterpolygon, er  $f(T) = a(T)$ .

**Bevis:**  $P$  deles i trekanter.

Dette er Picks sætning (1899), Georg Alexander Pick (1859-1942).

---

 Kære læser

Til alle jer der læser **Gamma** vil **Gamma**s redaktion nu gerne introducere vores nye medredaktør Jakob Wrigley, 1. års studerende på fysik! En stor velkomst til ham! Hurra Hurra Hurra! Dette betyder dog ikke, at **Gamma** ikke også vil have dig i vores redaktion!

Mens vinteren sniger sig ind på **Gamma**, har vi fundet nogle spændende artikler i dette nummer. Steffen Grøndahl skriver om et simpelt hypotetisk mekanisk system, som bliver sammenlignet med den klassiske elektrodynamik, hvormed man kan beskrive forskellige fænomener som strålingsdæmpning og strålingsabsorberende medier. Fysikstuderende Christopher R. Jacobsen skriver om sit førsteårsprojekt i fysik, "Measuring the momentum of light", hvilket er ganske spændende at læse om, da det ikke er noget vi til hverdag tænker så meget over!

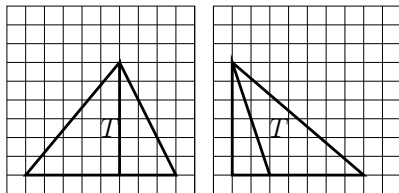
Som altid har **Gamma**s redaktion nyheder fra overalt i verden. Vi har noget om, hvordan en fysiker forstår sig på sne (passende til den kommede kolde tid), og en nyhed om hvordan vi beregner massen af en proton nu om dage.

Alt i alt er dette nummer spækket til bristepunktet med godter, som man kan sætte sig og nyde med nogle kager og en god kop kakao.

God læselyst

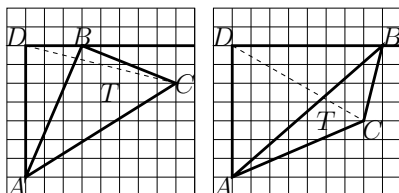
**Gamma**

(d) Hvis  $T$  er en trekant med én akseparallel side, er  $f(T) = a(T)$ .



**Bevis:**  $T$  er enten foreningsmængde af eller differens mellem to trekanter, der begge har to akseparallelle sider.

(e) Hvis  $T$  er en trekant uden en akseparallel side, er  $f(T) = a(T)$ .



**Bevis:** Lad  $R$  være det mindste akseparallelle rektangel, der indeholder  $T$ . Da hver af  $R$ 's sider indeholder præcis én af  $T$ 's vinkelspidser, er der en af  $T$ 's vinkelspidser ( $A$ ), der samtidig er vinkelspids i  $R$ , medens der om de to andre vinkelspidser i  $T$  gælder enten, at de ligger på hver sin af  $R$ 's øvrige sider, eller, at en af dem ( $B$ ) er sammenfaldende med den vinkelspids i  $R$ , der er over for  $A$ , og den anden i det indre af  $R$ .

Lad vinkelspidsen  $D$  i  $R$  være bestemt således, at  $ADBC$  er en konveks firkant (se figurerne). Så er

$$\begin{aligned} f(T) &= f(ADC) + f(DBC) - f(ADB) \\ &= a(ADC) + a(DBC) - a(ADB) \\ &= a(T). \end{aligned}$$

KATRINE RUDE LAUB (KRL) OG JAKOB WRIGLEY (JW)

## En fysikers fornemmelse for sne

At der på grønlandsk findes 50 forskellige ord for sne er en skrøne.<sup>1</sup> Men at der findes mange forskellige slags er der ingen tvivl om. Fysikeren Kenneth Libbrecht har lavet en klassifikation af snekrystaller, som inddeler dem i 35 forskellige typer såsom nåle, dendritter, plader og prismer. Hvilken type der dannes afhænger af temperatur og luftfugtighed.

De velkendte 6-armede krystaller med forgreninger, som fylder vinduer og gågader her i julemåneden, dannes især ved temperaturer under  $-15^\circ\text{C}$  med mere avancerede former i takt med at luftfugtigheden hæves. Stjerneformen og 6-kantede plader ses dog også lige under frysepunktet, mens der ved temperaturer mellem  $-3$  og  $-10^\circ\text{C}$  primært dannes nåle og prismer. Selvom iskrystallers morfologi er bestemt kvantitativt, og der er gjort ihærdige forsøg på at aflure fysikken bag, så er det stadig lidt af et mysterium, hvorfor deres type varierer så drastisk under forskellige forhold.



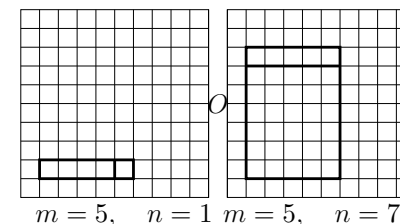
Foto: Kenneth Libbrecht

Den 6-foldige symmetri stammer fra vandmolekylernes organisering. Vandmolekyler i en iskrystal danner et hexagonalt gitter. Når først en kerne af frossen vanddamp har dannet sig omkring et støvkorn, vokser krystallen sig større. Til at starte med har krystallen form som et sekskantet prisme, men efterhånden som den bliver større sætter diffusion en begrænsning på væksten. De steder på krystallen, der stikker længst ud har en kortere diffusionsafstand, hvorfor de vil opleve den hurtigste vækst. Jo længere udvæksten bliver des hurtigere vokser den. Denne positive feedback mekanisme, kendt som Mullins-Serkerka instabiliteten, giver en forklaring på, hvordan snekrystallers forgreninger kan opstå.

<sup>1</sup>Grønlandsk er et polysyntetisk sprog, hvilket betyder, at et ord kan tilføjes nye betydningsdele. Således kan der laves nye ordformer som det på dansk vil kræve en hel sætning til at udtrykke. Der kan altså laves uendelig mange ordformer, men der findes kun 4-5 grundord for sne, hvilket ikke er så meget mere end på dansk.

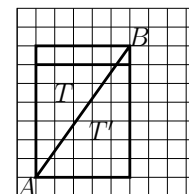
**Bevis for, at  $f(P) = a(P)$ :**

- (a) Hvis  $P$  er enhedskvadratet, er  $f(P) = a(P)$ . Bevis:  $i = 0, r = 4$
- (b) Hvis  $P$  er et akseparallelt rektangel med sider  $m$  og  $n$ , er  $f(P) = a(P)$ .



**Bevis:** Først induktion efter  $m$  med  $n = 1$ , derefter induktion efter  $n$  med  $m$  fast.

- (c) Hvis  $T$  er en trekant med to akseparallelle sider, er  $f(T) = a(T)$ .



**Bevis:** Lad  $P$  være det rektangel, der fremkommer, når man tegner akseparallelle linjer gennem den tredje sides endepunkter  $A$  og  $B$ . Så deler linjestykket  $AB$  rektanget  $P$  i to trekanter  $T$  og  $T'$ . Af symmetri Grunde er  $f(T) = f(T')$  og  $a(T) = a(T')$ , og af (1) og (b) følger, at

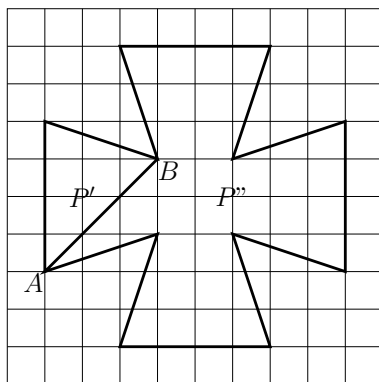
$$f(T) = \frac{f(T) + f(T')}{2} = \frac{f(P)}{2} = \frac{a(P)}{2} = a(T).$$

Jeg vil bevise, at formelen gælder ikke blot for trekanter, men for vilkårlige "gitterpolygoner", dvs polygoner med hjørner i gitterpunkterne. For en vilkårlig gitterpolygon  $P$  defineres  $f(P) = i + \frac{1}{2}r - 1$ , hvor  $i$  er antallet af gitterpunkter i det indre af  $P$ , og  $r$  antallet af gitterpunkter på randen.

Jeg skal bevise, at  $f(P) = a(P) = \text{arealet af } P$  for enhver gitterpolygon  $P$ .

**Lemma.** Hvis  $P$  er delt i to delpolygoner  $P'$  og  $P''$  ved et linjestykke, der forbinder to gitterpunkter  $A$  og  $B$  på randen af  $P$ , så er

$$f(P) = f(P') + f(P'').$$



**Bevis:** Lad  $i$ ,  $i'$ , og  $i''$  hhv  $r$ ,  $r'$ , og  $r''$  betegne antallet af indre gitterpunkter hhv randgitterpunkter for  $P$ ,  $P'$ , og  $P''$ , og lad  $i^*$  betegne antallet af indre gitterpunkter i  $P$ , som tilhører linjestykket  $AB$ .

Så er

$$i = i' + i'' + i^*,$$

og da  $A$  og  $B$  tæller med både i  $r'$  og  $r''$ , er

$$r = (r' - i^*) + (r'' - i^*) - 2,$$

og (1) følger.

På iskrystallens vej ned mod jorden, når den at opleve mange kombinationer af temperaturer og luftfugtigheder, hvorfor vækstbetingelserne varierer som funktion af tiden. Ændringerne er dog ikke mere lokale end, at alle seks arme udsættes for de samme forhold. Så symmetrien bevares stort set, hvis ikke andre forhold river dem i stykker på deres lange vej fra himlen.

Findes der så to ens snekrystaller? De simple prismer kan godt have en påfaldende lighed - på et makroskopisk niveau. Ser man derimod på de store, komplekse, 6-armede dendritter, er antallet af mulige kombinationer enorm. Det er derfor højest usandsynligt, at der nogensinde er faldet to ens snekrystaller til jorden efter en kaotisk tur gennem vindens turbulenser.

På Kenneth Libbrechts hjemmeside [www.snowcrystals.com](http://www.snowcrystals.com) kan man lære meget mere om dannelse af snekrystaller samt nyde hans imponerende fotografier, mens man drømmer om en hvid jul.

Kilder:

[1] Rep. Prog. Phys. 68 (2005) 855-895

[2] [www.snowcrystals.com](http://www.snowcrystals.com)



Foto: Kenneth Libbrecht

## En masse beregnet

Så skete det, langt om længe. I 89 år har man kunnet måle massen af protonen, men selv med de bedste computere har det ikke været muligt for teoretikerne at starte fra en beskrivelse af protonens opbygning og nå en beregnet værdi for protonens masse i nærheden af den eksperimentelt målte.

Nu er et hold teoretiske fysikere fra Frankrig, Tyskland og Ungarn nået dette mål, der markerer ankomsten af præcise beregninger af den komplicerede stærke kernekraft.

I 1970'erne opdagedes det at protoner og neutroner (nukleoner under et) består af endnu mindre partikler kaldet kvarker og gluoner. Disse partikler danner basen for en teori kaldet kvantekromodynamikken (QCD). Forsimpelt kan man sige at en proton består af to "up"-kvarker og en "down"-kvark med gluoner, der bevæger sig frem og tilbage mellem dem, for med den stærke kernekraft at binde dem sammen. For neutronen er det to "down"- og en "up"-kvark.

Virkeligheden er imidlertid mere kompliceret end som så, takket være usikkerhederne i kvantemekanik, et utal af gluoner og kvark/antikvarkpar, som spontant opstår og annihileres inde i nukleonen. Alle disse "virtuelle" partikler vekselvirker i et virvar af træk og skub, som gør det næsten umuligt at analysere kvantitativt. Således stammer 95% af en nukleons masse fra disse virtuelle partikler.

De 12 fysikere bag beregningerne, gjorde brug af en metode først anvendt i 1970, kaldet gitter QCD. Metoden går ud på at rum og tid ikke anskues, som værende kontinuerte, men derimod kvantificeres hhv. som en række faste punkter i et 3-dimensionalt gitter og tiden, diskret tikende i modsætningen til at flyde jævnt – lidt i analogi til forskellen mellem af de naturlige og de reelle tal.

Forskerne begrænsede da kvarkerne til punkterne i gitteret og gluonerne til gitterlinjerne ml. punkterne, og gitteret kunne således definere den "korteste afstand" og "korteste tid" for spillet mellem partiklerne og dermed forsimpler problemet betydeligt.

Selv med denne forsimpling dog, indeholder beregningerne millioner af variable og kræver supercomputere at regne på. Først fra år 2000 begyndte forskerne at inkorporere alle gluonerne og de flygtige kvark/antikvarkpar

Det kommer til kamp, hvis og kun hvis  $|y - x| \leq 1/12$ , dvs hvis og kun hvis  $(x, y)$  ikke ligger i en af trekantene

$$\begin{aligned} T_1 : \quad & \frac{1}{12} < x \leq 1 & \text{og} & \quad 0 \leq y < x - \frac{1}{12}, \\ T_2 : \quad & 0 \leq x < 1 - \frac{1}{12} & \text{og} & \quad x + \frac{1}{12} < y \leq 1. \end{aligned}$$

Sandsynligheden for, at de to duellantner mødes, er altså

$$1 - 2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{23}{144}.$$

## Svar – Eksponentielt

Når man får at vide, at tallet  $2^{29}$  er 9-cifret, og at de 9 cifre alle er forskellige, kan man så uden at udregne tallet bestemme, hvilket ciffer der mangler?

Vi har 
$$2^{29} = 2^2 \times (2^3)^9 \equiv 4 \times (-1)^9 = -4 \pmod{9}$$

og

$$0 + 1 + 2 + \dots + 9 \equiv 0 \pmod{9},$$

og altså må det manglende ciffer være 4.

## Svar – Trekantet

En trekant er tegnet på ternet papir, så alle tre hjørner er i skæringspunkter (punkter med heltallige koordinater). Lad nu  $r$  være antallet af skæringspunkter på randen og  $i$  antallet af skæringspunkter i det indre af trekanten. Vis, at arealet af trekanten er

$$i + \frac{1}{2}r - 1$$

Ved indsættelse af  $x_k = 2m_k - 1$ ,  $y_k = 2n_k - 1$  heri fås rekursion ligningerne

$$\begin{aligned} m_1 &= 4, & n_1 &= 3, \\ m_k &= 3m_{k-1} + 4n_{k-1} - 3, & n_k &= 2m_{k-1} + 3n_{k-1} - 2 \quad \text{for } k \geq 2 \end{aligned}$$

til bestemmelse af løsninger til sokkeproblemet.

Jeg vil slutte med at bevise, at dette er samtlige løsninger. Dertil vil jeg vise, at talsættene  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{\infty}$  er samtlige positive heltalsløsninger til (2). Lad nemlig  $(x, y)$  være en vilkårlig positiv heltalsløsning til (2), sæt  $z = x + y\sqrt{2}$ , og bemærk, at  $z \geq e$ .

Lad  $k \geq 0$  være bestemt således, at

$$e \leq ze^{-2k} < e^3, \quad (5)$$

og sæt  $z' = ze^{-2k}$ .

Da  $z'$  kan skrives  $z' = z\bar{e}^{2k}$ , er  $z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , lad os sige  $z' = x' + y'\sqrt{2}$ .

Da  $z'\bar{z}' = z\bar{z} = -1$  og  $z' > 1$ , er  $|\bar{z}'| = |x' - y'\sqrt{2}| < 1$ , hvilket kun kan være opfyldt, hvis  $x'$  og  $y'$  har samme fortegn, dvs hvis  $x'$  og  $y'$  begge er positive.

Da  $x'^2 = 2y'^2 - 1$ , er  $x' = y' = 1$  en mulighed, medens  $y' = 2, 3$  eller 4 ikke kan bruges.  $y' \geq 5$  giver  $x' \geq 7$ , og altså  $z' = x' + y'\sqrt{2} \geq e^3$  i modstrid med (5). Der må altså gælde  $z' = e$ , og dermed  $z = z'e^{2k} = z_k$ .

## Svar – Travle duellanter

Duellerne i Travløse er sjældent fatale. Hver kombattant møder op på et tilfældigt tidspunkt mellem 5 og 6 om morgenen på den aftalte dag, venter 5 min på sin modstander, og går igen, hvis denne ikke er mødt op. Ellers slås de to.

Hvad er sandsynligheden for, at det kommer til kamp?

Lad  $(x, y)$  betegne ankomsttidspunkterne for de to duellanter, regnet i timer fra klokken 5. Så er sandsynlighedsfordelingen for  $(x, y)$  Lebesguemålet på enhedskvadratet  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

De 12 fysikers fulde rapport kan findes på Science's hjemmeside [1] for de nysgerrige.

Kilder:

[1] <http://sciencenow.sciencemag.org/cgi/content/full/2008/1121/2>

# En mekanisk analog til klassisk elektrodyamik

Af

STEFFEN GRØNDAHL

*Steffen Grøndahl (f. 1970) er cand.scient i fysik fra Niels Bohr Institutet i 2000. Artiklen bygger på hans speciale. I dag arbejder han som softwareudvikler på Danmarks Meteorologiske Institut.  
E-mail: post@steffengrondahl.dk*

## 1 Introduktion

Denne artikel betragter et simpelt hypotetisk mekanisk system: En uendelig lang svingende streng, hvortil der er fastgjort en eller flere partikler (dvs små mekaniske legemer). Dette system udviser mange lighedstræk med den klassiske elektrodyamik; Således kan man beskrive fænomener så som stråling fra en punktformet kilde, strålingsdæmpning, strålingsabsorberende medium, samt refleksion og absorption af stråling, når stråling rammer dette medium.

## 2 Grundligninger for den svingende streng

Bølgeligningen for en svingende streng er som bekendt[1] givet ved:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{F(x, t)}{T} \quad (1)$$

Her er  $\psi$  bølgefunktionen, der beskriver strengens udsving fra ligevægtsstillingen,  $x$  er den rumlige akse, som den hvilende streng vil være sammenfaldende med ( $x$  tænkes orienteret vandret med voksende værdier

og det ses let, at hvis  $(x, y)$  er en heltallig løsning til

$$x^2 - 2y^2 = -1, \quad (2)$$

så er  $x$  og  $y$  begge ulige, således at  $m = (x+1)/2$  og  $n = (y+1)/2$  er hele. For at finde samtlige løsninger til sokkeproblemet, skal vi altså finde samtlige heltallige løsninger til (2) med  $x \geq 3$  og  $y \geq 3$ .

For reelle tal  $z$  i ringen  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  af tal af formen  $z = x + y\sqrt{2}$  med  $x, y \in \mathbb{Z}$  indfører vi betegnelsen  $\bar{z} = x - y\sqrt{2}$ .

Vi bemærker, at der for  $z, w \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  gælder  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ , samt at  $(x, y)$  er løsning til (2), hvis og kun hvis  $z = x + y\sqrt{2}$  er løsning til

$$z\bar{z} = -1. \quad (3)$$

Idet vi sætter  $e = 1 + 1\sqrt{2}$ , ser vi, at  $e\bar{e} = -1$ , hvoraf følger, at  $z$  er løsning til (3), hvis og kun hvis  $e^2 z$  er det.

Hermed har vi uendeligt mange løsninger til (3), nemlig

$$z_k = e^{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Her giver  $z_0 = e = 1 + 1\sqrt{2}$  ikke nogen løsning til sokkeproblemet, men alle  $z_k$  med  $k \geq 1$  gør, og specielt har vi  $z_1 = 7 + 5\sqrt{2}$ , der giver  $(m_1, n_1) = (4, 3)$ .

Ved brug af binomialformlen i (4), får vi

$$x_k = \sum_{j=0}^k \binom{2k+1}{2j+1} 2^{k-j}, \quad y_k = \sum_{j=0}^k \binom{2k+1}{2j} 2^{k-j},$$

der for  $k \geq 1$  giver løsningen

$$m_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j+1} 2^{k-j-1} + 1, \quad n_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j} 2^{k-j-1} + k + 1,$$

til sokkeproblemet.

Da  $z_k = e^2 z_{k-1} = (3 + 2\sqrt{2})z_{k-1}$ , kan følgen  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$  også bestemmes rekursivt ved

$$\begin{aligned} x_1 &= 7, & y_1 &= 5, \\ x_k &= 3x_{k-1} + 4y_{k-1}, & y_k &= 2x_{k-1} + 3y_{k-1} \end{aligned} \quad \text{for } k \geq 2.$$



**Theorem 9.1.** *If the - complex - numbers satisfy  $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = n - 1$  we have the Pfaff-Saalschütz formula (J. F. Pfaff 1797, L. Saalschutz 1890)*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [a_1, 1]_k [a_2, 1]_k [b_1, 1]_{n-k} [b_2, 1]_{n-k} (-1)^k \\ = [b_1 + a_1, 1]_n [b_1 + a_2, 1]_n (-1)^n$$

Så vi kan reducere til

$$\frac{1}{[n - \frac{1}{2}, 1]_n [n + \frac{1}{2}, 1]_n} [-1, 1]_n^2 = \frac{n!^2}{[n - \frac{1}{2}, 1]_n [n + \frac{1}{2}, 1]_n} = \\ \frac{2^{2n} n!^2}{[2n - 1, 2]_n [2n + 1, 2]_n} = \frac{2^{4n} n!^4}{[2n - 1, 2]_n [2n, 2]_n^2 [2n + 1, 2]_n} \\ = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)!(2n + 1)!}$$

## Svar – Sokker, der passer til hinanden

Når sandsynligheden for at få to røde sokker er  $\frac{1}{2}$ , når man trækker to tilfældigt ud af en sæk med røde og sorte sokker, hvor mange er der så af hver farve i sækken?

Det samlede antal sokker betegnes med  $m$ , og antallet af røde sokker med  $n$ . Så kan man udtage et par sokker på  $m(m-1)/2$  måder, og et par røde sokker på  $n(n-1)/2$  måder.

Sandsynligheden for, at et tilfældigt udtaget par sokker er røde, er altså  $n(n-1)/m(m-1)$ , og denne sandsynlighed er  $\frac{1}{2}$ , hvis og kun hvis

$$m(m-1) = 2n(n-1). \quad (1)$$

Et talpar  $(m, n)$ , som er løsning til (1), giver en løsning til sokkeproblemet, hvis  $m$  og  $n$  er hele tal  $\geq 2$ . Ligningen (1) kan omformes til

$$(2m-1)^2 = 2(2n-1)^2 - 1,$$

mod højre),  $t$  er tiden,  $v$  er bølgens hastighed,  $T$  er spændingen i strengen og  $F$  er krafttætheden (kraft pr længdeenhed) hidrørende fra en ydre kraft på strengen.

En bølge transporterer energi. Udtrykket for energitransporten findes i de fleste elementære lærebøger[1]:

$$P_+(x, t) = -P_-(x, t) = -T \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

Her er  $P_+(x, t)$  den energi pr tidsenhed, der til tidspunktet  $t$  passerer gennem punktet  $x$  mod højre. Tilsvarende er  $P_-(x, t)$  den energi pr tidsenhed, der til tidspunktet  $t$  passerer gennem punktet  $x$  mod venstre.

## 3 Greens funktion løsning

Vi vil nu søge en generel løsning til bølgeligningen (1). Vi indfører Greens funktionen  $G(x - x_0, t - t_0)$  defineret ved

$$\left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) G(x - x_0, t - t_0) = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) \quad (3)$$

Her er  $\delta(x)$  Diracs deltafunktion, der som bekendt opfylder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (4)$$

Af (3) følger, at løsningen til bølgeligningen (1) kan skrives

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x_0, t - t_0) \frac{F(x_0, t_0)}{T} dx_0 dt_0 + \psi_0(x, t) \quad (5)$$

hvor  $\psi_0$  er en løsningen til den homogene bølgeligning

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

der er bestemt af randbetingelserne. I det følgende vil vi se bort fra bidraget  $\psi_0$ , idet det fulde bidrag til bølgefunktionen tænkes at hidrøre fra eksplicitte kilder (givet ved  $F(x, t)$ ).

### 3.1 Retarderet løsning

Greens funktionen er ikke entydig defineret ved (3). I almindelighed benyttes den såkaldte retarderede Greens funktion givet ved:

$$G_{ret}(x - x_0, t - t_0) = \frac{v}{2} \left( \theta(t - t_0 - \frac{|x - x_0|}{v}) \right) \quad (7)$$

hvor

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x > 0 \\ 0 & \text{hvis } x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

er trinfunktionen. At (7) er en løsning til (3) ses lettes ved at benytte<sup>1</sup>

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x) \quad (9)$$

samt at trinfunktionen kan skrives som  $\theta(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{1}{2}$ .

Indsættes (7) i (5) med  $\psi_0 = 0$  fås

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t - \frac{|x - x_0|}{v}} \frac{v}{2T} F(x_0, t_0) dt_0 dx_0 \quad (10)$$

## 4 Stråling fra punktformet kilde

En punktformet kilde i  $x = 0$  giver anledning til følgende kraft pr længdeenhed:

$$F(x, t) = f(t) \delta(x) \quad (11)$$

hvor  $f(t)$  har dimension af kraft. Løsningen til bølgeligningen (10) kan nu skrives

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{t - \frac{|x|}{v}} \frac{v}{2T} f(t_0) dt_0 \quad (12)$$

Man bemærker – ikke overraskende – at den punktformede kilde vil give en bølge, der er symmetrisk om  $x = 0$ . Man kan lidt malende sige at den punktformede kilde stråler ud fra  $x = 0$ .

<sup>1</sup>Sammenhængen mellem  $\delta$ -funktionen og trinfunktionen, ses let ved at foretage partiel integration i  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{d\theta(x-a)}{dx} dx$  og sammenholde resultatet med (4)

For at komme nævneren til livs indføres faktoriellen

$$\left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_n \cdot \frac{1}{2} = \left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_{n+1} = \left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_{n-k} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left[ k - \frac{1}{2}, 1 \right]_k$$

hvorved fås

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{\left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_{n-k} \left[ k - \frac{1}{2}, 1 \right]_k}{\left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_n}$$

Så kan vi skrive

$$\frac{1}{\left[ n - \frac{1}{2}, 1 \right]_n \left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_n}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[ k - \frac{1}{2}, 1 \right]_k \left[ n - k - \frac{1}{2}, 1 \right]_{n-k} \left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_{n-k} \left[ k - \frac{1}{2}, 1 \right]_k$$

Nu skifter vi fortegn i alle faktorerne i de faktorieller, der indeholder et  $k$  i starten

$$\frac{1}{\left[ n - \frac{1}{2}, 1 \right]_n \left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_n}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[ -\frac{1}{2}, 1 \right]_k (-1)^k \left[ -\frac{1}{2}, 1 \right]_{n-k} (-1)^{n-k} \left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_{n-k} \left[ -\frac{1}{2}, 1 \right]_k (-1)^k$$

hvilket skrives pænere som

$$\frac{(-1)^n}{\left[ n - \frac{1}{2}, 1 \right]_n \left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[ -\frac{1}{2}, 1 \right]_k^2 \left[ -\frac{1}{2}, 1 \right]_{n-k} \left[ n + \frac{1}{2}, 1 \right]_{n-k} (-1)^k$$

Dette udtryk genkendes som Pfaff-Saalschütz' formel, (9.1), i min nylige lærebog, *Summa Summarum*, A K Peters 2007:

Bevis:

Vi definerer den nedstigende faktoriel med angivet skridtlængde således

$$[x, d]_n := \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} (x - jd) & n \in \mathbb{N} \\ 1 & n = 0 \\ \prod_{j=1}^{-n} \frac{1}{x + jd} & -n \in \mathbb{N}, -x \notin \{d, 2d, \dots, -nd\} \end{cases}$$

Vi omskriver de fleste binomialkoefficienter i summen til faktorieller

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!(2k)!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(2n)!(2k+1)}$$

Faktoriellerne med et 2-tal deles i faktorieller af hvert andet led og skridtlængde 2

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n! [2k, 2]_k [2k-1, 2]_k [2n-2k, 2]_{n-k} [2n-2k-1, 2]_{n-k}}{k!(n-k)! [2n, 2]_n [2n-1, 2]_n (2k+1)}$$

Nu halveres alle faktorerne, så skridtlængden bliver 1, med korrektioner af diverse potenser af 2

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n! k! 2^k [k - \frac{1}{2}, 1]_k 2^k (n-k)! 2^{n-k} [n-k - \frac{1}{2}, 1]_{n-k} 2^{n-k}}{k!(n-k)! n! 2^n [n - \frac{1}{2}, 1]_n 2^n (2k+1)}$$

Efter at have forkortet, hvad som kan, fås

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{[k - \frac{1}{2}, 1]_k [n-k - \frac{1}{2}, 1]_{n-k}}{[n - \frac{1}{2}, 1]_n (2k+1)} = \frac{1}{[n - \frac{1}{2}, 1]_n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{[k - \frac{1}{2}, 1]_k [n-k - \frac{1}{2}, 1]_{n-k}}{2k+1}$$

## 4.1 Partikel fastgjort til strengen

Som specialtilfælde for en punktformet kilde vil vi betragte en partikel, der er fastgjort til strengen i punktet  $x = 0$ . Partiklen kan kun bevæge sig i samme retning som strengen,  $y$ , og der gælder derfor for partiklens position:

$$y(t) = \psi(x = 0, t) \quad (13)$$

Af (12) følger da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{v}{2T} f(t) \quad (14)$$

og dermed

$$\psi(x, t) = y\left(t - \frac{|x|}{v}\right) \quad (15)$$

Denne simple sammenhæng kan synes noget overraskende, men beror på tre vigtige antagelser:

1. Der er intet begyndelsesfelt ( $\psi_0 = 0$ ).
2. Det er kun partiklen i  $x = 0$  der bidrager til kraften pr længdeenhed ( $F(x, t)$ ), jævnfør (11).
3. Strengen er uendelig lang.

Slutteligt bemærkes, at  $f(t)$  simpelthen blot er den kraft, som partiklen påvirker strengen med.

## 5 Udstrålet effekt fra partikel

Vi vil nu benytte (2) til at studere hvor meget energi, der udsendes fra partiklen på strengen (- husk på, at energien kun stammer fra partiklen, da den er den eneste kilde til bølger). Først betragtes et punkt  $x = r > 0$ . Den energi, der pr tidsenhed strømmer gennem dette punkt mod højre, er givet ved

$$P_+(x = r, t) = -T \frac{dy}{d\tau} \Big|_{t-\frac{r}{v}} \left( -\frac{1}{v} \frac{dy}{d\tau} \Big|_{t-\frac{r}{v}} \right) = \frac{1}{2} \frac{v}{2T} f\left(t - \frac{r}{v}\right)^2 \quad (16)$$

Et tilsvarende resultat fås ved at betragte energistrømmen mod venstre gennem punktet  $x = -r < 0$  og således bliver den samlede energi, der pr tidsenhed strømmer væk fra partiklen gennem ”kugleskallen” med radius  $r$ ,

$$P(r, t) = P_-(x = -r, t) + P_+(x = r, t) = \frac{v}{2T} f\left(t - \frac{r}{v}\right)^2 \quad (17)$$

Man ser at effekten afhænger af kraften til  $t - \frac{r}{v}$  og den momentant udstrålede effekt for partiklen er derfor

$$P(t) = \frac{v}{2T} f(t)^2 = \frac{2T}{v} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (18)$$

(hvilket naturligvis også let indses ved blot at tage grænsen  $r \rightarrow 0$  i (17)). I udledningen af (18) er benyttet (14). Den udstrålede effekt er givet entydigt ved partiklens hastighed.

## 6 Strålingsdæmpning

Ovenstående resultat (18) fortæller, at en partikel vil miste energi, når den genererer bølger; et ikke særligt overraskende resultat. Men hvis man spørger til dynamikken for partiklen er der en interessant konsekvens. Lad os forestille os, at partiklen er under påvirkning af en ydre konservativ kraft, for eksempel en harmonisk kraft (partiklen er eventuelt fastgjort til en fjeder og til strengen samtidig). Bevægelsesligningen kunne da se ud som

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{dV}{dy} \quad (19)$$

hvor  $m$  er partiklens masse og  $V(y)$  er potentialet for det ydre kraftfelt (fjederen i eksemplet). Men ifølge (19) vil den mekaniske energi være bevaret under partiklens bevægelse og dette stemmer ikke med, at partiklen vil miste energi, når den skaber en bølge. For at redde energibevarelse adderes derfor en dæmpende kraft  $g(t)$  til bevægelsesligningen:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{dV}{dy} + g(t) \quad (20)$$

## Svar – En tryllekunst

Tryllekunstneren og hans assistent præsenterer publikum for 8 mønter på en række. Tryllekunstneren instruerer publikum om opgaven og forlader lokalet. Publikum vælger nu for hver mønt, om den skal være krone eller plat. Derefter oplyser publikum assistenten om deres foretrukne mønt, fx. nr. 5 fra venstre. Nu vender assistenten én af mønterne om efter sit valg.

Tryllekunstneren kommer ind fra kulissen og udpeger den foretrukne mønt.

Vi stiller mønterne på række og giver dem numre fra venstre mod højre, 0, 1, ..., 7. Disse tal organiserer vi som gruppen  $\mathbb{Z}_2^3$ , fx. ved at skrive numrene binært fra 000 til 111 og definere gruppeoperationen som addition uden mente – eller, om man vil, med regnereglen  $1+1=0$ . Så fx. er  $3+6=011+110=101=5$ . En række af mønter gives nu værdien, der er summen af numrene på de viste kroner. Mønsteret PPKKPKPP får således summen  $2+3+5=010+011+101=100=4$ . Hvis nu publikum vælger at pege på mønt nr. 3, så skal vi vende en mønt, så summen bliver 3 i stedet for 4. Vi skal altså løse ligningen  $4+x=3$ . Men da alle elementer i gruppen er deres egen inverse, er  $x=3+4=011+100=111=7$ . Vi skal derfor vende den sidste mønt, så vi får PPKKPKPK med summen  $2+3+5+7=010+011+101+111=011=3$ .

Dette trick virker for enhver potens af 2, men med andre antal mønter kan kunsten ikke udføres. Prøv selv at lave tryllekunsten med 3 mønter!

## Svar – En sum

I Amer. Math. Monthly April 2008 stilles som problem 11356 en opgave af Michael Poghosyan, Yerevan State University, Yerevan, Armenien.

Vis identiteten

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

Opgaven går ud på at bestemme *samlige* Pythagoræiske trekanter af den slags.

## Opgave – De logiske frimærkesamlere

Tre personer – A, B og C – var alle fuldstændig logiske. De kunne alle tre øjeblikkelig drage alle de logiske konsekvenser af alle præmisser. Desuden vidste hver af dem, at de to andre var lige så logiske som han selv. Man viste dem syv frimærker; to røde, to gule og tre grønne. Derpå fik de bind for øjnene, og et frimærke blev klistret i panden af dem hver især, mens de resterende frimærker blev lagt ned i en skuffe. Da øjenbindene var fjernet, spurgte man A: “Kan du nævne én farve, som dit frimærke i hvert fald ikke har?” “Nej,” svarede A. Så fik B det samme spørgsmål, og han svarede også “nej”.

Er det muligt ud fra disse oplysninger at regne sig frem til, hvilken farve A’s frimærke havde? Eller B’s? Eller C’s?

## Opgave – Joakim von And i Sahara

Joakim von And er som bekendt verdens rigeste og nærigste and. Da han derfor engang skulle køre over Sahara i jeep, måtte han jo spekulere på, hvor billigt det kunne lade sig gøre.

Nu var hans jeeps kun i stand til at køre en trediedel af vejen på en fuld tank, men til gengæld kunne alle hans jeeps køre fuldautomatisk uden chauffør, og han havde masser af dem. Og han kunne let tømme og fylde tankene midt i ørkenen uden at spilde. Men med fuld tank menes så meget benzin, som en jeep på nogen måde kan medbringe.

Problemet er, hvordan slipper Joakim von And billigst muligt over ørkenen, når hele hans flåde af jeeps står på den ene side. Hvor mange jeeps skal han bruge, og hvordan skal han bære sig ad?

Multipliceres denne ligning med  $\frac{dy}{dt}$  fås, at tabet af mekanisk energi pr tidsenhed er givet ved

$$P(t) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + V(y) \right) = -g(t) \frac{dy}{dt} \quad (21)$$

Sammenholdes med (18), ses at energibevarelse kun kan være opfyldt dersom

$$g(t) = -\frac{2T}{v} \frac{dy}{dt} = -f(t) \quad (22)$$

Dette er et yderst tilfredsstillende resultat

- Den indførte dæmpende kraft  $g(t)$  kan gøre rede for energiregnskabet som ønsket.
- Ligning (22) kan let tolkes ud fra loven om aktion og reaktion (Newtons 3. lov): Hvis partiklen påvirker strengen med en kraft  $f(t)$  vil strengen virke tilbage på partiklen med en lige så stor men modsat rettet kraft.

Dæmpningskraften er således blot reaktionskraften fra strengen.

## 7 Strålingsabsorberende medium

Det er muligt at indføre et strålingsabsorberende medium, altså et medium, der vil absorbere energien i bølgen. Idéen er at betragte en større samling af partikler, der alle er fastgjort til strengen og placeret jævnt og tæt. Hver partikel mærker en dæmpende kraft (udover reaktionen fra strengen) og resultatet er, at bølger bliver absorberet i dette medium, hvilket vises ved en eksPLICIT beregning.

Vi vil i dette afsnit ikke benytte Greens funktion løsninger til bølge ligningen, men kun selve bølgeligningen (1), dynamikken for en partikel givet ved bevægelsesligningen (20) og at partiklerne er fastgjort til strengen (13).

Betragt først igen partiklen, der er fastgjort til strengen i  $x = 0$ . Vi betragter specielt tilfældet hvor denne udover reaktionskraften fra strengen ( $-f(t)$ ) kun mærker en harmonisk kraft  $-m\omega_0^2 y$  (svarende til den

potentielle energi  $V(y) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2$  og en dæmpende kraft,  $-m\gamma \frac{dy}{dt}$ . Bevægelsesligningen (20) kan nu skrives

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - m\gamma \frac{dy}{dt} - f(t) \quad (23)$$

Ligning (23) kan løses formelt ved at skrive  $y(t)$  og  $f(t)$  på Fourierform

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (24)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (25)$$

Indsat i (23) fås

$$\tilde{f}(\omega) = m(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma) \tilde{y}(\omega) \quad (26)$$

Udnyttes yderligere, at partiklen er fastgjort til strengen (13) og skrives bølge-funktionen på Fourierform

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (27)$$

fås

$$\tilde{f}(\omega) = m(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma) \tilde{\psi}(x=0, \omega) \quad (28)$$

Lad os nu forestille os, at en række identiske partikler, alle under påvirkning af en harmonisk kraft  $-m\omega_0^2 y$  og en dæmpningkraft  $-m\gamma \frac{dy}{dt}$ , er fastgjort til strengen i området  $x > 0$  og vel at mærke jævnt fordelt med tætheden  $N$ . Krafttætheden  $F(x, t)$  er i princippet en sum over de enkelte partiklers kraft på strengen og derfor udpræget diskontinuert (på grund af delta-funktionen fra hver partikel). Men vi ønsker ikke at beregne bølgen med mikroskopisk nøjagtighed så vi midler ud hvilket giver

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Nm(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma) \tilde{\psi}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad x > 0 \quad (29)$$

## 7.1 Reflektion og transmission af stråling gennem det absorberende medium

Som et konkret eksempel på det absorberende mediums egenskaber, vil vi beregne løsningen til bølgligningen (1) i tilfældet hvor mediet rammes af en simpel planbølge.

falsk, og den tredje, som er min yndlingsdatter, kan svare sandfærdigt eller falsk, som hun vil. Hun har alligevel aldrig rettet sig efter mig.

Ud fra svaret på dit spørgsmål skal du vælge din brud. Men jeg advarer dig: Hvis du vælger min yndlingsdatter, skal du have dit hoved hugget af!”

Prinsen havde ingen anelse om, hvem der var kongens yndlingsdatter, lige så lidt som han anede, hvem der ville tale sandt, og hvem falsk. Han måtte altså formulere sit spørgsmål sådan, at ligegyldigt hvem han spurgte, og ligegyldigt, hvad hun svarede, skulle han ud fra svaret kunne vælge en af de to andre til sin brud.

Naturligvis stillede prinsen et så snedigt spørgsmål, at han med sikkerhed undgik yndlingsprinsessen. Og kongen blev så imponeret, at han alligevel gav prinsen yndlingsdatteren, og de to levede lykkeligt til deres dages ende.

Hvordan mon prinsen formulerede sit spørgsmål?

## Opgave – Gitterpunkterne

Forleden dag sad jeg og slog kruseduller på et almindeligt ark ternet papir. Så kom jeg for skade at lege med gitterpunkterne. Jeg valgte 5 af dem tilfældigt ud.

Så tegnede jeg alle 10 forbindelseslinier mellem dem. Og hver gang var der et af liniestykkerne, der passerede hen over et gitterpunkt.

Hvorfor det?

## Opgave – Pythagoras

En Pythagoræisk trekant med heltallige sider,  $x$ ,  $y$  og  $z$ , der opfylder

$$x^2 + y^2 = z^2$$

må have mindst én side som et lige tal. Og ingen Pythagoræisk trekant har en side af længde 2. Men man kan tænke sig en Pythagoræisk trekant, hvis sider er to primtal og et tal, der er det dobbelte af et primtal.



## —Paradokser og Opgaver

MOGENS ESROM LARSEN OG KATRINE RUDE LAUB

Vi modtager meget gerne læserbesvarelser af opgaverne, samt forslag til nye opgaver enten per mail ([gamma@nbi.dk](mailto:gamma@nbi.dk)) eller per almindelig post (se adresse på bagsiden). Første indsendte, korrekte læsning til en af de stillede opgaver bringes i næste nummer af **Gamma**.

### Opgave – Den mystiske pyramide

Egyptens ældste pyramide, trinpyramiden ved Sakkara, ligner ikke Cheops' og de andre. Som navnet antyder, har den snarere form som en kæmpetrappe, mere som Mayaernes pyramider.

Hvis vi begynder fra over, er der én sten i det øverste lag, fire i det næste, ni i det tredje, osv.

Når vi nu får at vide, at antallet af sten, der ialt er medgået til byggeriet, er et kvadrattal, og at der er medgået mere end én sten, hvor mange trin har så pyramiden?

### Opgave – Eventyret

Der var engang en prins, der skulle vælge sig en prinsesse. Han havde valget mellem tre søstre, som alle var unge og smukke. Deres far var en viis gammel konge, og han ville sikre sig, at hans kommende svigersøn havde omløb i hovedet. Så han sagde til prinsen:

“Før du får min velsignelse til at ægte en af mine døtre, vil jeg sætte dit mod og din intelligens på en prøve.

Du får lov til at stille én af prinsesserne ét spørgsmål, som kan besvares med “ja” eller “nej”. Den ene vil svare sandfærdigt, den anden vil svare

Udenfor mediet ( $x < 0$ ) gælder den homogene bølgeligning, (6). Vi vil antage, at bølgen består af en simpel planbølge, der bevæger sig ind mod det strålingsabsorberende medium, samt en reflekteret bølge

$$\psi(x, t) = \psi_I(x, t) + \psi_R(x, t), \quad x < 0 \quad (30)$$

Her er  $\psi_I(x, t)$  den plane bølge, der rammer det strålingsabsorberende medium og derfor udbreder sig mod højre

$$\psi_I(x, t) = A \sin\left(\omega_I\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} d\omega \quad (31)$$

hvor

$$A(\omega) = \frac{A}{2i} (\delta(\omega + \omega_I) - \delta(\omega - \omega_I)) \quad (32)$$

Den reflekterede bølge  $\psi_R(x, t)$  må udbrede sig mod venstre

$$\psi_R(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{-i\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)} d\omega \quad (33)$$

I det absorberende medium ( $x > 0$ ) gælder den inhomogene bølgeligning (1), med  $F(x, t)$  givet ved (29). Den inhomogene bølgeligning kan derfor skrives

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}(x, \omega)}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} (\eta(\omega) + i\kappa(\omega))^2 \tilde{\psi}(x, \omega) \quad (34)$$

hvor vi benytter den Fouriertransformerede bølgefunktion  $\tilde{\psi}(x, \omega)$  jævnfør (27) og har indført det komplekse brydningsindeks  $\eta(\omega) + i\kappa(\omega)$  ved

$$(\eta(\omega) + i\kappa(\omega))^2 = 1 - \frac{v^2 N}{\omega^2 T} m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) \quad (35)$$

Af (35) følger:

$$\left. \begin{aligned} \eta(\omega) &= \eta(-\omega) > 0 \\ \kappa(\omega) &= -\kappa(-\omega) > 0 \text{ for } \omega > 0 \\ \eta(\omega) &= 1 \text{ for } N = 0 \\ \kappa(\omega) &= 0 \text{ for } N = 0 \\ \kappa(\omega) &= 0 \text{ for } \gamma = 0 \\ \eta(\omega) &= 1 \text{ for } \gamma = 0 \text{ og } \omega = \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Den generelle løsning til (34) er

$$\tilde{\psi}(x, \omega) = C(\omega)e^{i\omega(\eta(\omega)+i\kappa(\omega))\frac{x}{v}} + D(\omega)e^{-i\omega(\eta(\omega)+i\kappa(\omega))\frac{x}{v}} \quad (37)$$

Her vil leddet proportionalt med  $C(\omega)$  svare til en bølge, der udbreder sig mod højre, mens leddet proportionalt med  $D(\omega)$  svarer til en bølge, der udbreder sig mod venstre, jævnfør (27). Vi antager, at der ikke er noget bidrag fra bølgen, der udbreder sig mod venstre og sætter derfor  $D(\omega) = 0$ .

Den fulde løsning til bølgeligningen fremkommer nu ved at forlange at bølge-funktionen og dens afledede med hensyn til  $x$  er kontinuert overalt. Betragtes specielt punktet  $x = 0$  (grænsen mellem medium og "vakuüm") fås

$$A(\omega) + B(\omega) = C(\omega) \quad (38)$$

og

$$\frac{i\omega}{v}A(\omega) - \frac{i\omega}{v}B(\omega) = \frac{i\omega}{v}(\eta(\omega) + i\kappa(\omega))C(\omega) \quad (39)$$

Disse to ligninger løses let med resultatet:

$$B(\omega) = \frac{1 - (\eta(\omega) + i\kappa(\omega))}{1 + (\eta(\omega) + i\kappa(\omega))}A(\omega) \quad (40)$$

$$C(\omega) = \frac{2}{1 + (\eta(\omega) + i\kappa(\omega))}A(\omega) \quad (41)$$

Indsættes heri (32) og indsættes dette i (27) fås

$$\psi_R(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \eta(\omega) - i\kappa(\omega)}{1 + \eta(\omega) + i\kappa(\omega)} \frac{iA}{2} e^{-i\omega(t+\frac{x}{v})} \times \quad (42)$$

$$\times (\delta(\omega - \omega_I) - \delta(\omega + \omega_I)) d\omega$$

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iA}{1 + \eta(\omega) + i\kappa(\omega)} e^{-i\omega(t - (\eta(\omega) + i\kappa(\omega))\frac{x}{v})} \times \quad (43)$$

$$\times (\delta(\omega - \omega_I) - \delta(\omega + \omega_I)) d\omega, \quad x > 0$$

der let integreres og efter længere men trivielle beregninger giver

$$\psi_R(x, t) = \frac{1 - \eta(\omega_I)^2 - \kappa(\omega_I)^2}{(1 + \eta(\omega_I))^2 + \kappa(\omega_I)^2} A \sin\left(\omega_I\left(t + \frac{x}{v}\right)\right) \quad (44)$$

$$+ \frac{2\kappa(\omega_I)}{(1 + \eta(\omega_I))^2 + \kappa(\omega_I)^2} A \cos\left(\omega_I\left(t + \frac{x}{v}\right)\right)$$

Helge Kragh er professor i videnskabshistorie og kan formodes at vide mindst lige så meget om disse ting som undertegnede, men her må jeg indrømme, at jeg ikke forstår, hvordan han når frem til, at Bohr svar ikke skulle forstås som en demontering af EPRs argument.

Men disse kritikpunkter er, når alt kommer til alt, få og små detaljer.

I det store og hele er det lykkedes Helge Kragh at skrive en letlæst, velskrevet og spændende introduktion til en af det 20. århundredes største tænkere og vigtigste offentlige figurer.

I forhold til diskussionen om kvantefysikken og kausaliteten og determinismens betydning i den moderne fysik kan man siges kun at få den "ene side", som det er naturligt i en bog om Einstein; en oplagt ide ville være være at supplere *Einsteins univers* med en *Bohrs verden*, der gav en tilsvarende introduktion til Niels Bohrs filosofiske ideer og deres betydning.

Men *Einsteins univers* indeholder faktisk alt, hvad man med rimelighed kan forvente af en introduktion til Einsteins tanker. Hvis du synes, at noget overhovedet i denne anmeldelse lyder spændende, og du ikke helt har styr på, hvad Einsteins bidrag til fysikken egentlig gik ud på, er denne bog højst sandsynligt noget for dig.

Køb den, lån den på biblioteket eller skim den ved boghandleren og gå på opdagelse i dens litteraturliste.

Carsten Agger



at finde under alle filosofiske gemytters juletræ - især naturligvis, hvis vedkommende ikke i forvejen er bekendt med de filosofiske aspekter af netop Einsteins arbejde.

Men hvad har den af svagheder? Er det bare clean sailing hele vejen igennem? Vel, jeg kender selv den specielle og almene relativitetsteori fra min tid på universitetet, og i det store og hele slipper Kragh godt fra den vanskelige balancegang, som det er at forklare essensen i disse ting uden at gå i detaljer... men jeg vil altså tro, at nogle af læserne falder af et sted eller to.

Jeg er ikke sikker på, at det kan gøres meget bedre uden at bruge urmeligt meget plads, så det bedste man kan gøre er måske at supplere læsningen af denne bogs kapitel to og tre med en god populær introduktion til selve teorien (Einsteins egen *Relativity. The Special and the General Theory*<sup>1</sup> fra 1917 forudsætter fysik ca. på gymnasieniveau og har mange gode forklaringer af begreberne).

På side 86 skriver Kragh om Bohrs svar på den såkaldte EPR-artikel fra 1935, at der "ikke [var] tale om, at Bohr demonterede EPR-argumentet, snarere at han kritiserede det ud fra forudsætninger, som Einstein ikke delte."

Jeg er ikke af den opfattelse, at dette er et korrekt udsagn. Kort fortalt forsøgte Bohr at vise, at Einstein *et als* argument om, at nogle bestemte fysiske størrelser måtte tillægges bestemte fysiske værdier i en situation, hvor kvantemekanikken forbød det, ikke holder, hvis man analyserer, hvordan de fysiske størrelser, man gerne vil måle, overhovedet er defineret, og hensigten var tydeligvis netop at demontere Einstein, Podolsky og Rosens argumenter.

Og således blev argumentet da også modtaget af mange samtidige fysikere. Den russiske fysiker S. V. Illarionov skriver i sit bidrag til bogen *Einstein and the philosophical problems of 20th century physics* (Progress Publishers, Moskva 1983):

Bohr's arguments were perceived by the world scientific community as an almost ideal triumph of quantum mechanics. In any case, there were no more doubts about the inner completeness and consistency of the theory.

(*The Einstein-Bohr controversy*, s. 407)

<sup>1</sup>www.bartleby.com/173/

og

$$\psi(x, t) = \frac{2(1 + \eta(\omega_I))}{(1 + \eta(\omega_I))^2 + \kappa(\omega_I)^2} A \sin\left(\omega_I(t - \eta(\omega_I)\frac{x}{v})\right) e^{-\omega_I \kappa(\omega_I)\frac{x}{v}} + \frac{2\kappa(\omega_I)}{(1 + \eta(\omega_I))^2 + \kappa(\omega_I)^2} A \cos\left(\omega_I(t - \eta(\omega_I)\frac{x}{v})\right) e^{-\omega_I \kappa(\omega_I)\frac{x}{v}}, \quad x > 0 \quad (45)$$

hvor vi har brugt de to første ligninger i (36).

Om de to løsninger (44) og (45) bemærkes

- Begge løsninger er reelle (som forventet)
- Frekvensen af den reflekterede bølge er den samme som for den indfaldende bølge,  $\psi_I(x, t)$ , hvilket også er som forventet.
- Den effektive hastighed i det strålingsabsorberende medium er  $\frac{v}{\eta(\omega_I)}$ . Med andre ord bestemmes hastigheden af den reelle del af brydningsindekset,  $\eta(\omega_I)$ .
- Den imaginære del af brydningsindekset  $\kappa(\omega_I)$  medfører, at stråling absorberes i mediet, jævnfør leddet  $e^{-\omega_I \kappa(\omega_I)\frac{x}{v}}$  i (45). Man kan let beregne halveringstykkelsen til  $\frac{v \ln 2}{\omega_I \kappa(\omega_I)}$ .
- I tilfældet  $N = 0$  (intet absorberende medium) reduceres (44) og (45) til  $\psi_R(x, t) = 0$  henholdsvis  $\psi(x, t) = \psi_I(x, t)$  for  $x > 0$ , jævnfør ligning 3 og 4 i (36). Den fulde løsning er således blot en planbølge, der udbreder sig mod voksende værdier for  $x$ . Igen helt som forventet.
- Hvis der ikke er nogen dæmpende kraft i mediet (altså hvis  $\gamma = 0$ ) og den indfaldende bølge  $\psi_I$  justeres så  $\omega_I = \omega_0$ , følger af ligning 5 og 6 i (36), en løsning, der er identisk med løsningen i tilfældet  $N = 0$ . Med andre ord vil den indfaldende bølge i dette tilfælde penetrere ganske uhindret gennem mediet. Dette er en speciel form for resonans med det mediet.
- I grænsen hvor mediet er uendeligt tæt og/eller tungt ( $Nm \rightarrow \infty$ ) vil vi have  $\eta \rightarrow \infty$  og  $\kappa \rightarrow \infty$  (jvf (35)). I denne grænse reduceres (44) og (45) til  $\psi_R(x, t) = -A \sin(\omega_I(t + \frac{x}{v}))$  henholdsvis

$\psi(x, t) = 0$ . Vi har med andre ord - ikke overraskende - fuldstændig refleksion i dette tilfælde.

## 8 Analogi til elektrodynamik

Den her beskrevne model er som sagt på mange måder analog med den klassiske elektrodynamik. Både hvad angår resultater og ræsonnementer. En fuldstændig gennemgang af dette vil føre for vidt her, så derfor blot nogle kommentarer:

- Den væsentligste forskel er, at elektrodynamikken udspiller sig i det tre-dimensionale rum. Dette giver ekstra frihedsgrader og dermed ekstra kompleksitet. For eksempel vil man i bølgeligningen skulle benytte d'Alembert operatoren,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  i stedet for  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .
- I stedet for et skalarfelt  $\psi$  har man i elektrodynamikken to vektorfelter (den elektriske og det magnetiske feltstyrke). Igen noget der forøger kompleksiteten.
- Man kan løse den inhomogene bølgeligning med en Greens funktion, men denne vil nu afhænge af alle tre rum-koordinater. Således er den retarderede Greens funktion

$$G_{ret}(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0) = \frac{\delta(t_0 - t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c})}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (46)$$

- Løsningen for en enkelt partikel er velkendt som Liénard-Wieckerts løsning (se for eksempel [2]). Igen er felterne beskrevet entydigt ved partiklens bevægelse, men med en kompliceret afhængighed af partiklens position, hastighed og acceleration.
- Den udstrålede effekt beregnes ved hjælp af Poynting vektoren, men da feltet (Liénard-Wieckert løsningen) er ret kompliceret beregnes normalt den energi, der strømmer ud gennem en stor kugleskal om partiklen. Fordelen er, at man så kan nøjes med at medtage de bidrag til felterne, som aftager svagest med afstanden  $r$  (som  $\frac{1}{r}$ ).

definitionen af, hvordan begreberne "afstand" og "samtidig" skal forstås for systemer i bevægelse. Således kunne Einstein skabe en teori, der løste problemet med lysets hastighed i det tomme rum og forenede den klassiske mekanik og elektromagnetisme - på bekostning af forestillingen om tid og rum som absolutte størrelser.

Det var også Einsteins opfattelse, at teorier ikke er absolut sande, efter som de altid er udtrykt i begreber, som er opfundet af det menneskelige sind, og forsøger at beskrive en verden, hvor disse begreber ikke hører hjemme.

En fysisk teori som relativitetsteorien blev efter Einsteins opfattelse således ikke *opdaget*, den blev *skabt*. Verden er "empirisk underbestemt", så det er altid muligt at skabe mange forskellige teorier, der kan forklare de data, det er muligt at indsamle.

Ultimativt kan en fysisk teori ikke bevises eksperimentelt, for selvom et eksperiment bekræfter teoriens forudsigelser, giver denne bekræftelse ingen sikkerhed for, at et andet forsøg ikke vil modbevise teorien på et senere tidspunkt:

Eksperimenter eller observationer kan ikke entydigt vise, at en teori er korrekt, men de kan godt vise, at den er forkert. Dette skyldes den logiske struktur af deduktive slutninger, idet en forkert teori meget vel kan føre til sande forudsigelser eller andre konsekvenser; men hvis en teori deduktivt fører til en konsekvens, der viser sig at være forkert, må teorien også være forkert. (s. 108)

Hvis der nu skulle sidde nogen samfundsforskere eller idéhistorikere derude, som synes, at det er noget, de har hørt før, skal jeg ikke skuffe dem - ja, det lyder grangiveligt som Popper, og det er ikke nogen tilfældighed.

Popper var faktisk meget inspireret af Einsteins fysik, og Poppers formulering af kravet om, at en videnskabelig teori må være falsificerbar, tog netop udgangspunkt i Einsteins holdning til muligheden for at afprøve fysiske teorier eksperimentelt. Einstein var på sin side meget begejstret for Poppers *Logik der Forschung* og bidrog vel med sin begejstring til teoriens udbredelse.

*Einsteins univers* er altså, som det vil forstås, en kort og letlæst præsentation af Einstein som tænker og filosof, og som sådan burde den være

verdenssyn, der ligger bag.

Ikke-fysikere vil nok have gavn af at supplere kapitlerne om den specielle og almene relativitetsteori med en god populærvideenskabelig introduktion til selve teorien, hvilket Kragh da også selv antyder i sit forord.

Jeg kan ikke her give en sammenfatning af Einsteins filosofiske position eller hans bidrag til fysikken og deres konsekvenser - det ville føre alt for vidt. Og her er en vigtig pointe: Jeg kan ikke se, hvordan man skulle kunne give en forsvarlig gengivelse af Einsteins filosofiske position på ret meget mindre end de 154 sider, som Kraghs bog fylder.

Som sådan er bogen vigtig for enhver fysiker med interesse for filosofi, og for enhver lægmand med interesse for videnskabsfilosofi og moderne fysik: Bogen giver den kortest mulige sammenfatning af Einsteins bidrag på forskellige områder og oplyser således læseren om det hele, samtidig med at den righoldige litteraturliste giver god mulighed for at fordybe sig i enkelte emner for den, der måtte have lyst til det.

Der er således kapitler om den specielle og almene relativitetsteori, om kosmologi, om Einsteins bidrag til og lange polemik mod kvantefysikken og om hans forhold til videnskabsfilosofi, religion og politik.

Det bedste og mest interessante er for mig at se kapitlet om videnskabsfilosofi, hvor der trækkes interessante perspektiver fra Einsteins unikke og intuitive tilgang til teoridannelsen.

Einstein var nemlig en usædvanligt deduktiv og aksiomatisk indstillet fysiker. Hans arbejdsmetode var ikke at opstille teorier ved at generalisere ud fra de empiriske data, men at opstille nogle vigtige aksiomer eller postulater ud fra fundamentale, fysiske principper og ud fra dem deducere sig frem til, hvordan verden må se ud.

Noget af det, der skilte Einstein ud, var en enestående intuition i valget af postulater og en tilsvarende uforfærdethed i forhold til disse postulaters konsekvenser.

Grundlaget for den specielle relativitetsteori var således Einsteins postulat om, at alle naturlove må være de samme i ethvert system, der bevæger sig med jævn hastighed. I elektromagnetismen var der en konstant, der ifølge dette postulat måtte være den samme for alle, nemlig lysets hastighed i det tomme rum.

Men lysets hastighed kunne kun være den samme for to iagttagere, der bevæger sig i forhold til hinanden, hvis man lavede om på hele de-

Resultatet (kendt som Larmors teorem) giver den energi der stråles uendelig langt væk

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) \quad (47)$$

Sammenlignes med (18) ses analogien tydeligt: Hvor vi for strengen havde, at den udstrålede effekt var proportional med kvadratet på partiklens hastighed, bliver den i elektrodynamikken proportional med kvadratet på partiklens acceleration. Dette resultat gælder dog kun i den ikke-relativistiske grænse.

- Strålingsdæmpningen kan beregnes fuldstændig analogt med beregningerne i afsnit 6. Hvis man indskrænker tilfældet til en ikke-relativistisk kvasiharmonisk bevægelse fås, at strålingsdæmpningen er proportional med den tidsafledede acceleration. I modsætning til strengtilfældet er det ikke helt let at finde den fysiske årsag til dæmpningskraften. Desuden giver det problemer at have en dæmpningskraft, der afhænger af den tidsafledede af accelerationen. (Se [3] for en dybtgående diskussion af disse emner.)
- I elektrodynamikken er det muligt at indføre et dipolfelt, der er karakteriseret ved en indre harmonisk og dæmpende kraft på dipolen. Et sådan dipolfelt vil virke som et absorberende medium (se for eksempel [4]) og en analyse viser, at det elektriske felt i dette medium adlyder en ligning analog med (34), og altså med et kompleks brydningsindeks.
- Endelig kan man let beregne refleksion og transmission af planbølget elektromagnetisk stråling, der falder vinkelret ind på det absorberende dipol medium. Resultater er ikke overraskende meget lignende (44) og (45). Dog haves ikke en resonans i tilfældet  $\omega_I = \omega_0$  (men en divergens).

## Litteratur

- [1] B. Elbek: *Bølger*, Niels Bohr Institutet (1994)
- [2] L.D. Landau & E.M. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields*, 4 ed, Pergamon (1975)
- [3] F. Rohrlich: *Classical Charged Particles*, World Scientific Publishing Company, 3 edition (2007)
- [4] R. Becker: *Electromagnetic Fields and interaction Vol 1 and 2*, Dover (1982)

# Boganmeldelser

---

## Einsteins univers

**Einsteins univers - en fysikers tanker om natur og erkendelse**

Helge Kragh

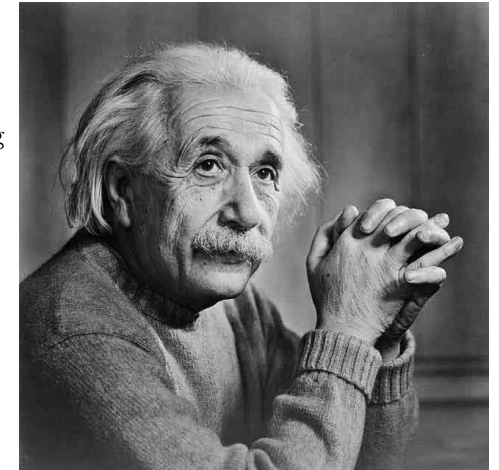
154 sider

Aarhus Universitetsforlag, 2008

198 kr

Som fysiker skilte Albert Einstein (1879-1955) sig ud ved en unik og meget karakteristisk filosofisk tilgang, som bærer en stor del af æren for hans teories elegance og gennemslagskraft, og som senere i hans liv måske stillede sig i vejen, da det ikke lykkedes at opstille en samlet teori for elektromagnetisme og gravitation, der kunne tilfredsstille hans egne filosofiske forestillinger og fysiske intuition om, hvordan en sådan teori skulle se ud.

Professor i videnskabshistorie ved Århus Universitet Helge Kragh har med sin nye bog *Einsteins univers - en fysikers tanker om natur og erkendelse* givet os en kortfattet gennemgang netop af Einsteins tankeverden og filosofi. Bogen er struktureret som en biografi, men modsat de fleste andre Einstein-biografier er vægten ikke på hans personlige liv, hans bidrag til fysikken eller hans virke som offentlig og politisk figur, men på hans filosofi og idéhistoriske udvikling.



Efter en kort introduktion gennemgår bogen kapitel for kapitel de vigtigste aspekter af Einsteins tankeverden, og det slipper den for det meste godt fra: Kragh bestræber sig på at gengive netop så meget af teorien som er nødvendig for at forstå de filosofiske overvejelser og det

pendulum, would enable a more precise measurement of the distance between the incident light and the y-axis of rotation. The inaccuracy of this measurement is largely responsible for the uncertainty of our measured force.

## 6 Conclusion

We successfully measured the force of light and shown thereby that light has momentum, despite a photon having no mass. It was encouraging to see how small a force we were able to measure ( $\sim 10^{-9}$  N) and how close to the theoretical values our results were. After correcting the results, with a factor resulting from multiple reflections, our measured force was 6 percent from the theoretical, with an uncertainty of 12 percent.

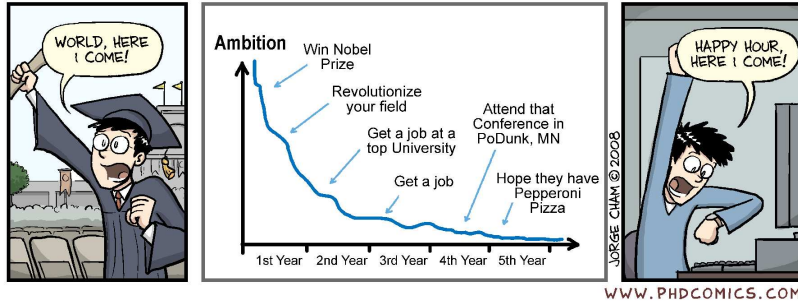
The collection of data via a photosensor made it possible to see the pendulums motion in real-time, and this was a wonderful tool to see precisely what happened when the light-source was activated or deactivated.

All in all our experiment has given us some very useful results.

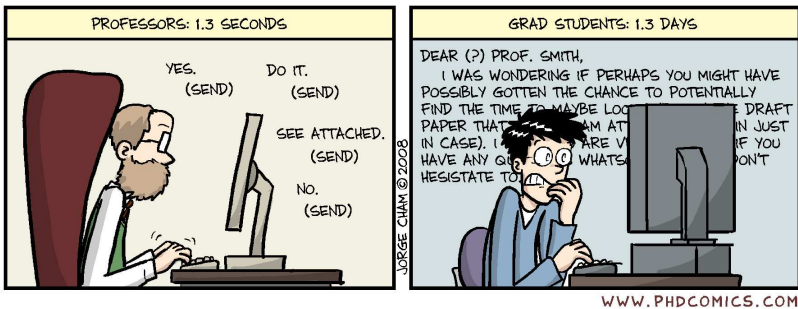
## Litteratur

- [1] Bak, K., Jacobsen, C., & Prag, C. (2008). Lysets Impuls. First-year project.
- [2] Nichols, E. F. & Hull, G. F. (1903). The Pressure Due to Radiation. The Astrophysical Journal, Vol. 17 No. 5, pp 315-351.
- [3] Young, H. & Freedman, R. University Physics, 12 ed. 2008.
- [4] Dam, M. (2007). Introduktion til den specielle relativitetsteori, 7. udgave. Niels Bohr Institute.
- [5] Ashkin, A. (1972). The Pressure of Laser Light. Scientific American 226(2), 63, 1972.
- [6] Jensen, T. (2002). Measuring the Pressure of Light. [www.dartmouth.edu/~dujs/202s/pressureoflight.pdf](http://www.dartmouth.edu/~dujs/202s/pressureoflight.pdf)
- [7] Lembessis, V. (2001). P. N. Lebedev and Light Radiation. Europhysics News (2001) Vol. 31 No. 7. [www.europhysicsnews.com/full/07/article4/article4.html](http://www.europhysicsnews.com/full/07/article4/article4.html)
- [8] Lilley, S. (1998). The Pressure of Light. [www.u.arizona.edu/~lilley98](http://www.u.arizona.edu/~lilley98)

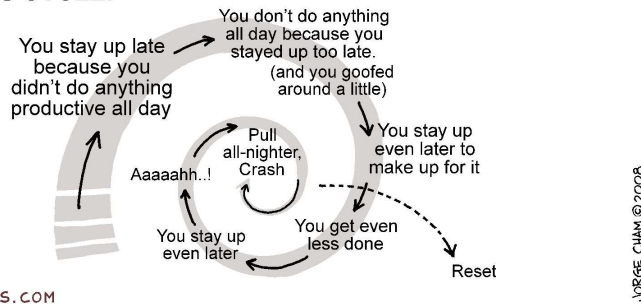
**YOUR LIFE AMBITION - What Happened??**



**AVERAGE TIME SPENT COMPOSING ONE E-MAIL**

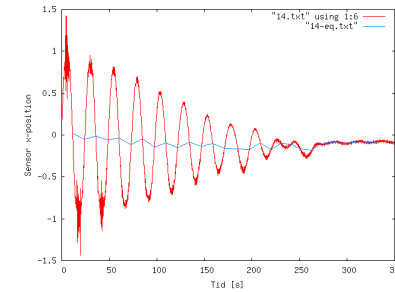


**THE VICIOUS CYCLE:**



WWW.PHDCOMICS.COM

JORGE CHAM © 2008



**Figur 10:** Reduction in amplitude with the help of light

longer systematically larger, but are distributed both above and below the theoretical.

We now believe that the larger values we measured for the force of light were not due so much to the light-mill effect, but instead were caused by multiple reflections.

**4.3 Changing the amplitude**

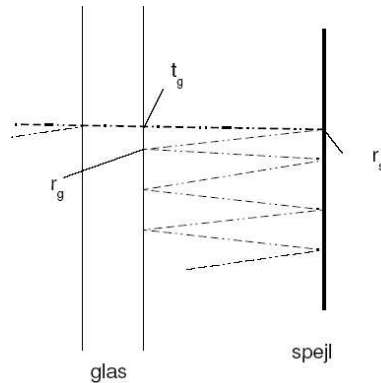
As discussed in section 3.3, it is possible to use the momentum of light to increase or decrease the oscillation amplitude, by turning the source-laser on/off at the right times. This method was used much in the calibration of the photosensor and to zero the pendulum. One example of this is shown in figure 10.

**5 Suggestions for improvement**

To reduce the light-mill effect, believed responsible for the secondary equilibrium position, a tighter vacuum chamber should be used, so that the vacuum can be reduced further. A mirror that reflects light closer to 100 % may also help reduce the light-mill effect, by reducing heating from absorption.

Anti-reflective glass would reduce the effect of multiple-reflections, though these can also be taken into account in the theory.

Finally, a ruler mounted within the chamber or etchings marked on the



**Figure 9:** Reflections between the glass and mirror (spejl)

We found that the chamber glass was slightly reflective and that there were multiple visible reflections of the source-laser on the glass's surface. See figure 9.

Although, we did not initially measure the fraction of light reflected by the glass  $r_g$ , we subsequently found it to be 7.1 %. Thus, a small fraction of the light reflected by the mirror is reflected back on the mirror again. The result is a geometric series that asymptotically approaches a finite value.

We can define from eq. 16 the momentum factor for a single reflection as  $f_1 = t_g(1 + r_s)$ . The reflection factor for the  $n$ th reflection becomes  $f_n = t_g(1 + r_s) \cdot (r_g(1 + r_s))^{n-1}$ . Summing over an infinite number of reflections, we get:

$$f_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} t_g(1 + r_s) \cdot (r_g(1 + r_s))^n = \frac{t_g(1 + r_s)}{1 - r_g(1 + r_s)} = \frac{1}{1 - r_g(1 + r_s)} f_1 \quad (17)$$

Using the values for  $r_g$  and  $r_s$ , we get a resulting momentum factor from multiple reflections that is about 15 % larger than for a single reflection. When we include this factor in the calculation of the theoretical force, the experiment results improve to within 6 % of theory, which is well within the 12 % uncertainty of our measurements. In addition, the results are no

## Measuring the momentum of light

Af

CHRISTOPHER R. JACOBSEN

*Christopher R. Jacobsen er fysikstuderende på Niels Bohr Institutet. Artiklen bygger på hans førsteårsprojekt.*

In physics, momentum is one of the most fundamental properties. The law of conservation of momentum is universal. According to the special theory of relativity, light has momentum despite the fact that a photon has no mass. This claim is very surprising, for how can something without mass have momentum? From Newton's second law of motion, we know that something that has momentum can exert a force. So can light exert a force? If so, can we measure it?

This article describes a first-year physics project to measure the force exerted by light and thus show that light does indeed have momentum, conducted by Kjeld Bak, Christian Prag and myself in the spring of 2008, under the guidance of Ian Bearden and Mogens Levinsen.

We constructed a torsion pendulum in a vacuum chamber and fired a powerful laser at a mirror attached to the pendulum. The pendulum rotated away from the laser light and we could measure the force of the light by the angle of deflection. By using a second laser to measure the angle of deflection and a photosensor attached to a computer, we could see the effect of light on the pendulum in real-time, and were able to record precise data about its motion.

The results were very encouraging. We were able to both visibly see the effect of light on the pendulum and measure a force in the order of  $10^{-9}$ N. The measured force was within 6 % of that predicted by theory.

# 1 Theory of the momentum of light and its force

In order for the law of conservation of momentum to hold for inertial systems moving at a significant fraction of the speed of light, the special theory of relativity added the Lorentz-factor  $\gamma$  to the classical definition of momentum.

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

As the speed of a particle  $v$  approaches the speed of light  $c$ , the momentum approaches infinity. For photons ( $v = c$ ), although the Lorentz-factor is infinite, the mass is also zero. So what then is the momentum of a photon? The answer comes from the theory of special relativity and the equation for the total energy of a particle:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \quad (2)$$

For a photon  $m = 0$  and we get  $E = pc$  or  $p = E/c$ , which written as a vector becomes:

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{n} \quad (3)$$

Where  $\vec{n}$  is a unit vector that points in the direction of the photon's movement. The force on the photon is the time-derivative of its momentum and for a beam of light with a given power is:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{E}{c} \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{E}{c} \frac{\Delta\vec{n}}{\Delta t} = \frac{Power}{c} \Delta\vec{n} \quad (4)$$

Where  $\vec{n}$  is the change in direction of the beam of light.

In our experiment, we shall measure the force that light exerts on a mirror. In a collision between a photon and a mirror, the force exerted on the mirror is equal to the force exerted on the photon, but in the opposite direction, according to Newton's third law of motion. In such a collision,

Experiment series	Laser position	Laser Power [mW]	Measured $F$ [N]	Measured $F$ Uncertainty [%]	Theoretical $F$ [N]	$\frac{\text{Measured } F}{\text{Theoretical } F}$
2	BH	513	$3.52 \cdot 10^{-9}$	11.00%	$2.50 \cdot 10^{-9}$	1.41
3	BH	511	$2.94 \cdot 10^{-9}$	12.00%	$2.49 \cdot 10^{-9}$	1.18
3	BV	519	$3.41 \cdot 10^{-9}$	11.70%	$2.53 \cdot 10^{-9}$	1.35
4	FV	517	$2.58 \cdot 10^{-9}$	18.30%	$2.52 \cdot 10^{-9}$	1.02
4	FH	517	$3.08 \cdot 10^{-9}$	14.30%	$2.52 \cdot 10^{-9}$	1.22
5	FH	520	$2.67 \cdot 10^{-9}$	10.30%	$2.54 \cdot 10^{-9}$	1.05
5 (fit)	FH	520	$2.93 \cdot 10^{-9}$	4.60%	$2.54 \cdot 10^{-9}$	1.15
6 (fit)	FH	514	$3.05 \cdot 10^{-9}$	4.60%	$2.51 \cdot 10^{-9}$	1.22
Average		516	$3.06 \cdot 10^{-9}$	11.80%	$2.52 \cdot 10^{-9}$	1.21 $\pm$ 0.14

**Table 2:** Average results for each experiment series

To improve the fit, a shutter mechanism was used in series 6 to place a marker in the photosensor data so we knew exactly when the source-laser was turned on/off. This helped a little with the fit results, but the results were still of same order as with the other series.

## 4.1 Experiment results

Table 2 shows the average results for each series with the photosensor and the combined average. The combined average is weighted by the power of the laser.

The results for the experiments are close to the theoretical. Overall, we measured a force that was about 21 ( $\pm 14$ ) percent larger than the theoretical. The uncertainty of our force measurement is about 12 %.

## 4.2 Multiple reflections

One possible explanation of why we systematically measured a larger force than predicted by theory may be that multiple reflections of the source-laser from the glass plate increased the force applied to the mirror.



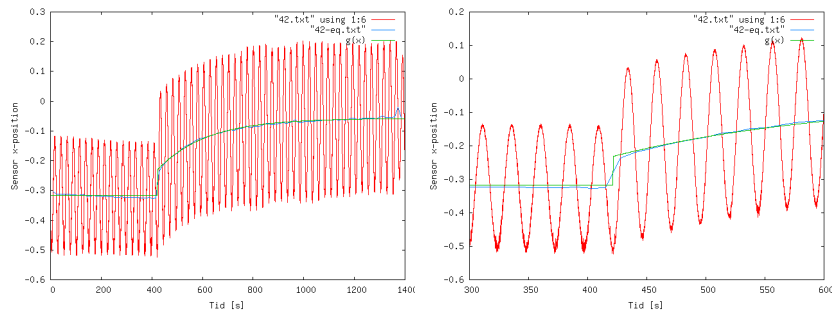


Figure 8: Turn-on of the source-laser with fit and equilibrium curves

that the equilibrium changes instantaneously as expected with the incidence of light. However, afterwards, the equilibrium continues to change slowly in the same direction asymptotically towards a secondary equilibrium position. Due to its slow nature, we presume that this secondary change is caused by the heating of the mirrors surface and the air around it - a light-mill effect. Apparently, our vacuum was not sufficient to eliminate these effects completely.

To avoid that this secondary equilibrium change affects the results, only the first equilibrium position following the change was used to calculate the force. However, each equilibrium position is about 6 seconds apart, so the secondary force may have already had an effect on the first equilibrium position following the change. Therefore, the calculated force of light could only be seen as an upper limit.

At this stage, we suspected that the secondary equilibrium position could be the reason behind the larger than expected force measurements. Therefore, in series 5, the data recording time was lengthened to get enough data to use gnuplot to fit a simple exponential model to the secondary change. With this fit, we hoped to get a better result for the force of light. However, we found it difficult to get gnuplot to determine when the source-laser was turned on/off, and we had to set the time to halfway between the two equilibrium points bracketing the change. The precision of our result improved, but we were still getting systematically larger values for the force. Figure 8 shows the fit results for experiment 42 in experiment series 5. The fit matches well with the equilibrium curve.

the photon can be reflected by, absorbed by or transmitted through the mirror. For reflection  $|\vec{n}| = 2$ , for absorption  $|\vec{n}| = 1$  and for transmission  $|\vec{n}| = 0$ . If we define the fraction of photons in a beam of light that are reflected, absorbed or transmitted as  $r_s$ ,  $a_s$  and  $t_s$ , we get the following expression for the magnitude of the force exerted on a mirror by a beam of light:

$$F = \frac{Power}{c}(2r_s + a_s) \quad (5)$$

In the case where  $t_s$  is zero,  $a_s = 1 - r_s$  and the force on the mirror becomes:

$$F = \frac{Power}{c}(1 + r_s) \quad (6)$$

For a typical 1mW laser pointer, the force on a perfect mirror ( $r_s = 1$ ) will be ca.  $6 \cdot 10^{-12}N$ . This is very little force!

## 1.1 Other force effects

Light exerts not only a direct force on the mirror, but absorbed energy heats the mirror, and this can result in an additional force on the pendulum. The effect is known as the light-mill effect, and was first seen by Sir William Crookes in 1873. The device most often used to show students the light-mill effect resembles a clear glass light bulb, containing a vacuum and several blades, painted black on one side and white on the other, which are free to rotate. When exposed to light, the blades rotate, but do not demonstrate the force of light, but rather the force of small air currents, resulting from convection.

The light-mill effect exerts a maximum force at a pressure of around  $10^{-2}$  torr ( $10^{-5}$  atm), which decreases with reduced pressure and eventually disappears by  $10^{-6}$  torr ( $10^{-9}$  atm). In order to reduce light-mill effects in our experiment, we placed the pendulum in a high vacuum with a pressure of around  $10^{-5}$  torr ( $10^{-8}$  atm).

Another effect that can exert a force on the pendulum is out-gassing, where small pockets of gas molecules in the mirror's surface are ejected

away from the surface, because of low pressure or heating. The effect is generally short-lived; occurring immediately after a material is placed in a vacuum. Since the pendulum was maintained in a vacuum for several weeks, we do not expect this effect to influence the results.

Static electric charges can also exert a force on the pendulum. We avoided this by grounding the pendulum and the vacuum chamber.

## 2 Experiment setup

We used a torsion pendulum in a manner similar to that used by Cavendish to measure the force of gravity, and used by E.F. Nichols and G.F. Hall in 1901 to measure the pressure of light (Nichols & Hull (1903)). The experiments by Nichols and Hull were among the first to succeed in measuring the force of light with reasonable accuracy. In our case, though, we used lasers, a modern day vacuum pump, and a computer for data collection.

The simple purpose of the experiment is to aim a laser beam at a mirror attached to a torsion pendulum, and to measure if the amount it rotates is in agreement with the force that we expect the light beam of the laser to have. Our experiment's setup is sketched in figure 1 and figure 2.

The torsion pendulum (pendul) consists of a balanced horizontal bar (see figure 3), upon which three small mirrors are attached: one at each end, for providing a torque from the incident light, and one in the middle, for measuring the angle of rotation. The horizontal bar is made of steel, and ca. 140 mm long. It is hung from its center by a thin thread of gold-plated wolfram. The mirrors are made of thin glass, vacuum-coated with aluminum, and ca. 20 mm square.

We used two lasers: one to exert a force on one of the end-mirrors - the source-laser (impuls laser), and one to measure the rotation of the pendulum - the measurement-laser (målelaser). Our light source was a powerful 500 mW laser, with a wavelength of 726 nm, which is on the border of the infrared spectrum. We were fortunate to be able to loan the laser from Torsana Laser Technologies. We used a laser power meter to measure the source-laser's power before and after each experiment. The measurement-laser was a standard 5 mW green laser pointer. We connected the laser pointer to a DC power supply, instead of using batteries,

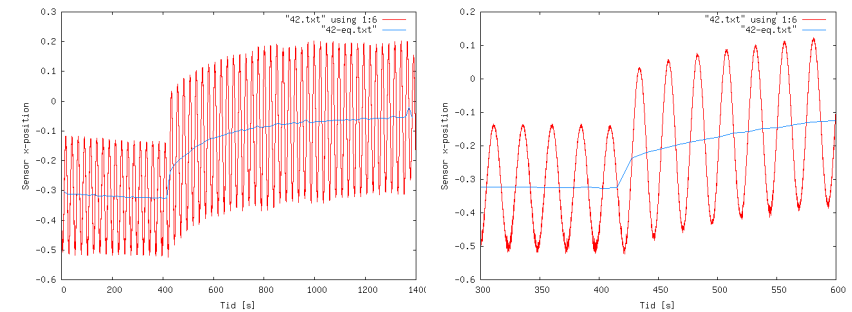


Figure 7: Turn-on of the source-laser with equilibrium curves

source-laser on/off. In this way, we got a feeling for the system, though the results were 2 to 4 times larger than expected from theory.

For the remaining series, we used the photosensor exclusively, calibrating it for each series. The raw data files that we recorded with LabVIEW were processed via different computer programs that we wrote, to remove noise and calculate the angular speed and acceleration of the pendulum. Using the fact that angular acceleration is zero when the pendulum is in equilibrium, equilibrium curves were generated for each recording. These curves show the pendulum's equilibrium before and after turning the source-laser on/off, and were used to calculate the force exerted by the source-laser using eq 15.

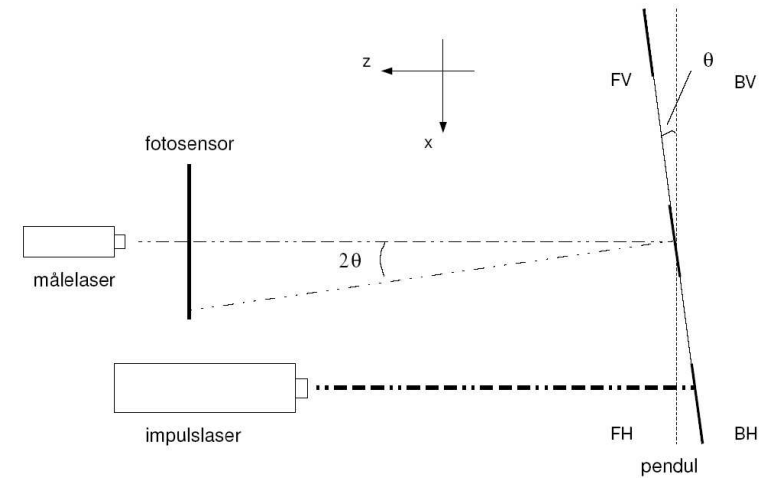
We began, in the second series, with recording the pendulum's oscillation before and after turning the source-laser on/off. We also made some experiments with increasing and decreasing the amplitude of oscillation. The results were still larger than expected from theory, but significantly better - only about 40 % larger.

In series 3 and 4, we made further recordings where we aimed the source-laser at the front and back sides of both the left and right mirrors, in order to see if it made a difference, and thus determine if there was a measurable systematic error in our pendulum. Fortunately, there was no clear difference between the four sides.

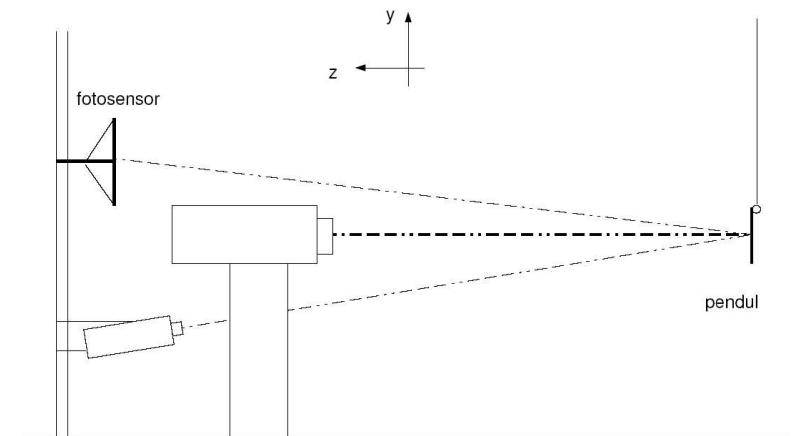
Figure 7 shows the typical photosensor data from turning-on the source-laser, where the second figure shows a close-up of the turn-on time. The equilibrium curve is also shown on the figure. Here it can be clearly seen

Variable	Symbol	Value	Uncertainty	Uncertainty percent	Unit
Pendulums moment of inertia about the $y$ -axis	$I_y$	$5.936 \cdot 10^{-6}$	$4.4 \cdot 10^{-8}$	0.742%	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Angular frequency for $y$ -axis	$\omega_y$	0.256	$2.3 \cdot 10^{-4}$	0.091%	$\text{s}^{-1}$
Oscillation period about the $y$ -axis	$T_y$	24.5	0.02	0.091%	s
Distance from the momentum-laser incidence point to the $y$ -axis	$d_y$	48	2	4.167%	mm
Transmission through the chamber glass	$t_g$	0.798	0.0099	1.2%	
Reflection on the mirror	$r_s$	0.835	0.0025	0.3%	

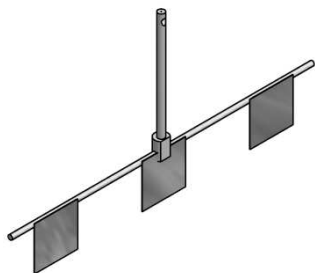
Tabel 1: Common experiment variables



Figur 1: Experiment setup seen from above



Figur 2: Experiment setup seen from the side



**Figure 3:** The torsion pendulum

and cooled it with a fan, to avoid variation in its power output.

A photosensor (fotosensor) connected to a computer was used to record the position of the measurement-laser's reflection from the center-mirror. The photosensor was a small 10x10 mm plate, which gave the position of a laser spot on its surface, in both the horizontal and vertical directions, as a voltage difference. We wrote a program in LabVIEW to read data from the photosensor, and once calibrated, we used this data and the geometry of the setup, to determine the angle of deflection of the pendulum. Not only could we measure an angle of deflection smaller than the eye could see, but we could see the deflection in real-time on the computer screen as the pendulum reacted to the source-laser. As well, we could calculate the force applied without waiting for the pendulum to come to rest.

Since the force of light is so small, the pendulum must be very sensitive. Air can affect the results, either by dampening the pendulum's motion, or by exerting a force from convection (the light-mill effect). Therefore, a vacuum chamber (see figure 4) was constructed by NBI's workshop to house the pendulum. The vacuum chamber is made of aluminum and covered on both ends by glass plates. Attached to the top is a pipe wherein is hung from a hook the thread suspending the pendulum. One can rotate the hook in order to zero the pendulum's position.

A vacuum pump was connected to the vacuum chamber and a pressure meter was used to read the pressure during each experiment. Unfortunately, our vacuum chamber was not completely tight, so we could not lower the pressure below  $10^{-5}$  torr ( $10^{-8}$  atm). This was, however, still a

$$F = \frac{\text{Effekt}}{c}(1 + r_s)t_g \quad (16)$$

### 3.3 Energy

A simple harmonic oscillator has both potential and kinetic energy. The pendulum swings between having all of its energy in kinetic form to having all of its energy as potential energy. Without external forces, the pendulum's total energy will be constant and equal to the maximum potential or kinetic energy.

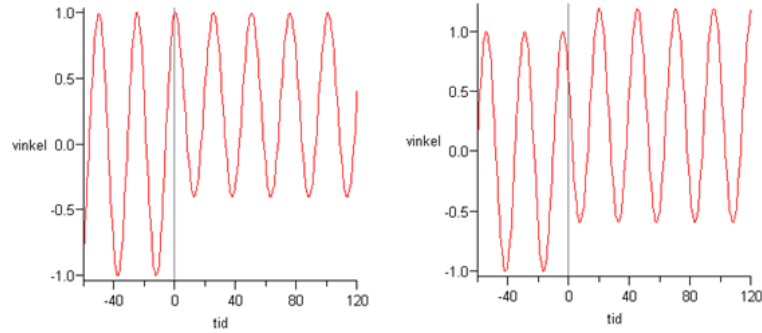
When the force from the light is added to or removed from the pendulum, it instantaneously changes the pendulum's equilibrium position. This instantaneously changes the pendulum's potential energy and thus its total energy, but does not change its kinetic energy. The total energy and thus the amplitude of the oscillation will be increased or decreased depending on when we add or remove the force from the light.

## 4 Experiment

We made nearly 50 experiments in different series, which are described in more detail in the original report. Table 1 shows the experiment variables that were common for all the experiments.

The moment of inertia about the y-axis  $I_y$  was calculated using precise measurements of mass and dimension for the pendulum. The angular frequency  $\omega_y$  was calculated from a gnuplot fit of several sets of experiment data. Transmission through the chamber glass  $t_g$  and reflection on the mirror  $r_s$  were measured using a laser power meter. The distance from the incidence point of the momentum-laser to the y-axis,  $d_y$ , was measured with a ruler. This value has the highest uncertainty of all experiment variables, since it was difficult to measure precisely the source-laser's point of incidence using a ruler through the glass of the vacuum chamber.

In the first series, we began by doing a few experiments the "old-fashioned way", where we did not use the photosensor. Instead, we placed a piece of paper on the wall opposite the pendulum, and made marks corresponding to the amplitude of oscillation before and after turning the



**Figure 6:** Pendulum motion when the incidence of the light occurs at the angular phases of 0 and  $\pi/3$

changes instantaneously with the addition or removal of the source-light. The change is given by:

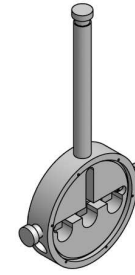
$$|\Delta\theta_{y, \text{equilibrium}}| = \frac{F d_y}{I_y \omega_y^2} = \frac{F d_y}{\kappa} \quad (14)$$

Given the change in equilibrium position and the angular frequency, it is possible to calculate how much force the light exerts. In the experiment, we measure the change in equilibrium position for oscillation around the  $y$ -axis, and thus find the force exerted by the light.

$$F = \frac{|\Delta\theta_{y, \text{equilibrium}} I_y \omega_y^2|}{d_y} \quad (15)$$

### 3.2 Theoretical force

Equation 6 describes the theoretical force for the reflection on a mirror. However, in our experiment, the source-light comes through the glass plate of the vacuum chamber. Therefore, we must add a factor  $t_g$  to represent the fraction of photons which are transmitted through the glass plate, when calculating the theoretical force.



**Figure 4:** Vacuum chamber

good high vacuum and sufficient for performing the experiment.

## 3 Experiment theory

We define the pendulum's suspension point as the zero point of our coordinate system, with the three axes shown in figure 1 and figure 2. The  $y$ -axis points upwards parallel to the thread, the  $x$ -axis points to the right seen from the photosensor, and the  $z$ -axis points from the pendulum towards the photosensor.

The pendulum hangs from a hook so that it can rotate freely about the suspension point around all three axes. The primary rotation that we are interested in is the twisting rotation about the thread (around the  $y$ -axis), as this can most easily be used to measure the force of the incident light. The two secondary rotations, a back-and-forth swinging (around the  $x$ -axis) and a side-to-side swinging (around the  $z$ -axis), are less interesting. Since the force exerted by the source-laser is parallel to the  $z$ -axis, it cannot induce rotation about the  $z$ -axis. As well, rotation about the  $x$ -axis is very small when compared to the  $y$ -axis, since the force from light must compete with gravity. Around the  $y$ -axis, only torsion impedes the pendulum's motion. In this article, I will only look at rotation around  $y$ -axis, i.e. around the thread suspending the pendulum. For those that are interested, the secondary axes are discussed in more detail in the original report.

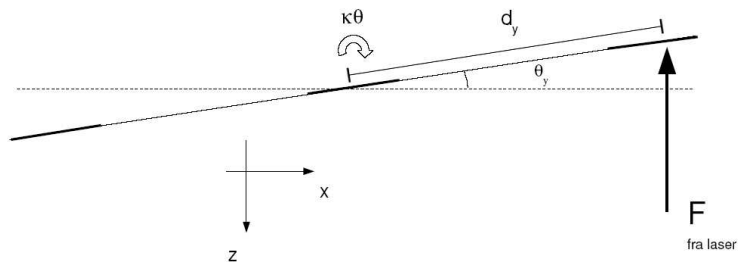


Figure 5: Force diagram for the primary axis of rotation

### 3.1 Equation of motion

The forces for rotation of the pendulum about the y-axis are shown in figure 5. The motion can be described by using the rotational analog of Newton's second law for torque around the y-axis  $\tau_y$ .

$$\sum \tau_y = Fd_y \cos(\theta_y) - \kappa\theta_y = I_y \ddot{\theta}_y \quad (7)$$

Where  $F$  is the force from the incident light,  $d_y$  is the distance of the light from the rotational axis (y-axis),  $\kappa$  is the torsion constant for the thread,  $\theta_y$  is the angle from the equilibrium position,  $I_y$  is the moment of inertia of the pendulum about the y-axis, and  $\ddot{\theta}_y$  is the angular acceleration. For a small angle  $\cos(\theta) \approx 1$  and the angular acceleration becomes:

$$\ddot{\theta}_y = -\frac{\kappa}{I_y} \theta_y + \frac{Fd_y}{I_y} \quad (8)$$

Equation 8 is a second order non-homogenous differential equation. Let us begin by solving it for the simple case where the pendulum is not in motion and in equilibrium when the source light is turned-on at time  $t = 0$ . In this case, the equation has the following solution:

$$\theta_y(t) = \frac{Fd_y}{I_y \omega_y^2} (1 - \cos(\omega_y t)) \quad \text{for } t \geq 0 \quad (9)$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{\kappa}{I_y}} \quad (10)$$

The solution describes a simple harmonic oscillation about a central position, where  $\omega_y$  is the angular frequency. The central position is the new equilibrium position and is given by:

$$\theta_{y, \text{equilibrium}} = \frac{Fd_y}{I_y \omega_y^2} = \frac{Fd_y}{\kappa} \quad (11)$$

Generally, the pendulum will already be oscillating prior to turning-on the source-light. For instance, the oscillations of the torsion pendulum used in this experiment were essentially undamped, and it would continue to oscillate for a very long time. In this case, in order to solve the differential equation, we need to know its amplitude and phase at time  $t = 0$ . If  $A$  is the amplitude and  $\varphi$  is the phase of oscillation for  $t \leq 0$ , the solution to the differential equation is:

$$\theta_y(t) = A \cos(\omega_y t + \varphi) \quad \text{for } t \leq 0 \quad (12)$$

$$\theta_y(t) = A \cos(\omega_y t + \varphi) + \frac{Fd_y}{I_y \omega_y^2} (1 - \cos(\omega_y t)) \quad \text{for } t \geq 0 \quad (13)$$

Note that eq. 12 is the general solution to the homogenous differential equation ( $F = 0$ ), and eq. 9 is a particular solution to the non-homogenous differential equation. The total solution eq. 13 is the sum of eq. 12 and eq. 9 as defined by the superposition principle. The solution is shown in figure 6 for two different angular phases.

When the source-light is turned-off, the solution is of the same form, but the time range is swapped, that is eq. 13 for  $t \leq 0$  and 12 for  $t \geq 0$ .

One can also find other forms of solutions to eq. 8, for example  $\theta_y(t) = C_1 \cos(\omega_y t + C_2) + C_3$ . All solutions will describe a simple harmonic oscillation around an equilibrium position, where the equilibrium position